

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

ZAMP

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler  
Redactor: R. Sängier

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

COLES, D.: The Problem of the Turbulent Boundary Layer . . . . .	181
MÜLLER, J.: Untersuchungen über Elektronenströmungen . . . . .	203
RUTISHAUSER, H.: Der Quotient-Differenzen-Algorithmus . . . . .	233
ZITO, G.: 723 A/B Reflex Klystron Performance . . . . .	252

*Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves*

MAEHLY, H. J.: Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen . . . . .	260
VOELLMY, H. R.: Aerodynamische Kräfte auf schlanke Rotationskörper . . . . .	263
WUNDT, H.: Abklingen eines schwachen Dralls in der Längsströmung zwischen coaxialen Kreis- zylindern . . . . .	270

*Varia - Miscellaneous - Divers*

COLLATZ, L.: Historische Anmerkung zum Aufsatz: Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis . . . . .	276
2. Internationale Tagung für Kurzzeitphotographie und Hochfrequenzkinematographie . . . . .	276
Generalversammlung der Union Radio-Scientifique Internationale vom 23. August bis 2. Septem- ber 1954 in den Haag . . . . .	277
Internationales Symposium über experimentelle Meteorologie in Zürich vom 4. bis 6. Oktober 1954 . . . . .	277
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	278

ZAMP	Vol. V	Fasc. 3	Pag. 181-282	15. 5. 54
------	--------	---------	--------------	-----------

Verlag Birkhäuser Basel, Schweiz

21  
37

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten* von Fr. 15.— pro Seite zu entrichten. Für Arbeiten, die mehr als 24 Seiten Umfang aufweisen, bedarf es einer Verständigung mit der Redaktion.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contribution to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in another than the original language. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free copies of separata prints without cover. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution* of Fr. 15.— per page exceeding the 16 pages. In case of articles of more than 24 pages, a special arrangement has to be made with the Editor.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution* de Fr. 15.— doit être payée par page supplémentaire. Dès qu'il s'agit de 24 pages ou plus, l'auteur est prié de se mettre en relation avec la rédaction.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.—, Ausland Fr. 48.—, Einzelnummer Fr. 10.—

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.—, foreign Fr. 48.—, single copy Fr. 10.—

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38.—, étranger Fr. 48.—, le numéro Fr. 10.—

Postabonnement - Post-Office Subscription - Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg  
Italien

Dänemark  
Marokko

Deutschland  
Norwegen

Finnland  
Portugal

Holland  
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr. 165.—,  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 88.—,  $\frac{1}{8}$  Seite/page: Fr. 50.—

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1954 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland



# The Problem of the Turbulent Boundary Layer

By DONALD COLES, Pasadena, California<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

Historically, experimental measurements of the magnitude of surface friction have usually preceded the development of adequate methods of prediction, and the writer's study of supersonic boundary layers<sup>2)</sup> is a case in point. In the present survey the turbulent boundary layer problem is examined in some detail from the experimental point of view, in an effort to identify the features which must eventually appear in any successful analysis of boundary layer flow.

If experimental measurements could be compared with an exact solution of the equations of fluid motion for the particular model geometry involved, any discrepancies could be assigned to error in the measurements or to failure of the equations to describe the behavior of the fluid in question. In practice, however, a comparison of physical and mathematical models for viscous fluid flow over a flat plate can be achieved only in an asymptotic sense, first because of mathematical approximations which are not uniformly valid in the entire flow field, and second because of physical imperfections which are idealized or ignored in the usual theoretical treatment.

The idea of an asymptotic correspondence between actual and assumed conditions is essential to any definition of the boundary layer problem. For laminar flow this idea, which is explicit in the boundary layer concept of PRANDTL, is acquiring an increasingly precise mathematical formulation, and the recent development of methods for improving the theoretical analysis in this respect is a conspicuous sign of current interest in the question [1]<sup>3)</sup>.

On the other hand, the present inadequate state of knowledge of turbulent shear flows requires the corresponding definition of the turbulent boundary layer problem to be almost completely heuristic, so that the validity of a particular analysis can only be tested in the light of experimental evidence. It is proposed to illustrate this difficulty by a brief discussion of the flat plate boundary layer, using an analysis which is frankly phenomenological and which is therefore less vulnerable to criticism of concept than an analysis which assumes one or another mechanism for the various turbulent transport processes.

<sup>1)</sup> Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology.

<sup>2)</sup> See *Measurements of Turbulent Friction on a Smooth Flat Plate in Supersonic Flow*, to be published separately.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 201.

While the review given here is designed to provide a point of departure for the study of compressible boundary layers, it should be remembered that the purpose of the discussion is always to facilitate the interpretation of experimental data, rather than to suggest or to support a particular theoretical analysis of the turbulent boundary layer.

## 2. General Considerations

The remarks of the present paper refer to steady two-dimensional mean flow past a smooth flat plate at sufficiently large Reynolds numbers so that the boundary layer hypothesis may be assumed to apply. It is further assumed that there is no heat transfer between the plate and the fluid, and that the pressure, density, and velocity of the external flow are uniform.

Early experiments, particularly those carried out in towing tanks, were in most cases designed to determine a mean friction coefficient from its definition in terms of the dynamic pressure and of the drag per unit width of one side of a flat surface,

$$D(x) = x q C_D(x), \quad (1)$$

while an alternative method makes use of the equivalence of the drag force and the rate of momentum change in the boundary layer or in the wake,

$$D(x) = \int_0^{\delta} \rho u (u_1 - u) dy. \quad (2)$$

Finally, the total drag may be equated to the sum of the downstream components of the integrated tangential and normal forces,

$$D(x) = \int_0^x \tau_w(x) dx + D_0(x), \quad (3)$$

where the second term on the right represents the drag of any isolated roughness elements which may be present on the plate surface.

The first two equations above are usually combined in the form

$$C_D(x) = \frac{2}{x} \Theta(x), \quad (4)$$

in which the boundary layer momentum thickness  $\Theta$  is defined by the definite integral

$$\Theta(x) = \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy. \quad (5)$$



The first and third equations in turn provide a relationship between drag and local friction,

$$C_D(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\tau_w(x)}{q} dx + \frac{D_0(x)}{q x}, \quad (6)$$

so that

$$\frac{\tau_w(x)}{q} = 2 \frac{d\Theta(x)}{dx} - \frac{1}{q} \cdot \frac{dD_0(x)}{dx}. \quad (7)$$

The notation in these expressions is chosen deliberately in order to emphasize that  $x$ ,  $\tau_w/q$ ,  $C_D$ , and  $\Theta$  are experimentally measured quantities. The essence of most boundary layer research consists of the assumption that there exist corresponding uniquely defined quantities  $\xi$ ,  $c_f$ ,  $c_F$ , and  $\theta$ , which may be associated with an ideal boundary layer, and of the attempt to determine the latter quantities by necessarily imperfect experimental techniques. That is, by definition,

$$c_f = c_f(\xi) = \frac{d}{d\xi} \xi c_F(\xi) = 2 \frac{d\theta}{d\xi}; \quad (8)$$

$$c_F = c_F(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^\xi c_f(\xi) d\xi = 2 \frac{\theta}{\xi}; \quad (9)$$

$$\theta = \theta(\xi) = \frac{1}{2} \xi c_F(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\xi c_f(\xi) d\xi. \quad (10)$$

In order to establish a connection between the experimental and ideal quantities defined above, it is necessary to introduce an additional hypothesis. The assumption usually made is that the effect of conditions near the leading edge on the surface friction far downstream will eventually vanish, in the sense that the function  $\Theta(x)$  for a smooth plate is the ideal relationship  $\theta(\xi)$  subject to a possible displacement of the streamwise coordinate; in other words, downstream of a particular point  $x = s$ ,

$$\theta(x - x_0) = \Theta(x). \quad (11)$$

Alternatively, a similar but less restrictive assumption may be made in terms of the local surface friction;

$$c_f(x - x_0) = \frac{\tau_w(x)}{q}. \quad (12)$$

In view of equations (4), (6), and (10), it is clear that the hypothesis (11) implies (12), while the converse is not true. Given the hypothesis (12), then

$$\theta(x - x_0) = \Theta(x) - \Theta_0, \quad (13)$$

where

$$\Theta_0 = \frac{D_0}{2q} + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\tau_w(x)}{q} dx - \frac{1}{2} \int_0^{s-x_0} c_f(\xi) d\xi. \quad (14)$$

The definition (14) assumes that the form drag  $D_0$  is independent of  $x$  downstream of  $x = s$ , as will be the case for example if  $D_0$  is associated with finite leading edge curvature or with the presence of boundary layer tripping devices on the surface of the plate. The experimental evidence suggests that the assumption (11) is probably sufficiently general in practice; i.e. that  $\Theta_0$  vanishes. The expression (14) thus serves to connect the drag of a tripping device with the position at  $x = x_0$  of the apparent origin of the turbulent boundary layer.

Finally, equations (8), (9), and (11) imply

$$c_F(x - x_0) = 2 \frac{\Theta(x)}{x - x_0}; \quad (15)$$

$$c_f(x - x_0) = 2 \frac{d\Theta(x)}{dx} = \frac{\tau_w(x)}{q}. \quad (16)$$

The remarks above apply to both laminar and turbulent boundary layers for arbitrary surface heat transfer and free stream Mach number. The definition of momentum thickness in equation (5) above is not rigorously correct for turbulent flow. However, since the usual experimental methods for measurement of mean velocity involve errors of comparable magnitude, no distinction will be made here.

The analysis leading to the equations (13) to (16) is carried out formally and in detail both because of its generality and because the considerations mentioned are fundamental to any evaluation of experimental data. The presence of the parameter  $\Theta_0$  in equation (13) immediately raises the question of uniqueness, especially for the turbulent boundary layer. The term uniqueness, in the sense used here, refers to the validity of a comparison of the ideal function  $\theta(c_f)$ , obtained by eliminating the variable  $\xi$  between the functions  $\theta(\xi)$  and  $c_f(\xi)$  of equations (8) and (10), with its experimental analog  $\Theta(\tau_w/q)$ . The suggestion that the slope of the experimental curve  $\Theta(x)$  may not imply a unique value of the ordinate  $\Theta$  is precisely equivalent to the introduction of the constant of integration  $\Theta_0$ . Since  $\theta$  increases with  $\xi$ , it is apparent that sufficiently far downstream the parameters  $x_0$  and  $\Theta_0$  must always become small compared to  $x$  and  $\Theta$  respectively. However, the sense in which an asymptotic correspondence between the real and ideal boundary layers is defined by this property is not the sense in which the concept is most appropriate to the experimental problem, as will be emphasized later.

The matter of uniqueness can be examined more closely for the laminar boundary layer, since the theoretical solution is known within the limitations



of the boundary layer approximation, and has been verified experimentally for low-speed flow by DRYDEN [2], LIEPMANN [3], DHAWAN [4], and others. The laminar equations are satisfied by a function of a single independent variable equivalent to  $y/\sqrt{\xi}$ . The consequent similarity of the various velocity profiles along the plate implies that the boundary layer momentum thickness is inversely proportional to the slope of the velocity profile at the wall, so that the functional relationship  $\theta(c_f)$  mentioned above is

$$c_f R_\theta = \text{const} = (0.664)^2, \quad (17)$$

for the laminar boundary layer with constant density, where  $R_\theta = u_1 \theta/\nu$ .

For the turbulent boundary layer, unfortunately, the question of uniqueness lies under a darker cloud than can be dissipated by theoretical arguments alone. Further consideration of this problem will therefore be deferred until it becomes convenient below to cite experimental evidence in support of an analysis, based on considerations of similarity, of the turbulent boundary layer.

### 3. Functional Similarity

In the early attempts of PRANDTL, VON KÁRMÁN, and TAYLOR to formulate a theoretical treatment of turbulent shear flows, the molecular transport process of the laminar regime was used as a model for a hypothetical turbulent transport process. These analyses have in common the concept of a characteristic length, somewhat analogous to the mean free path in a gas, whose magnitude is estimated in terms of some physical property of the mean flow.

Not only have these theories made possible a careful extrapolation of empirical knowledge of turbulent shear flows to conditions outside the contemporary range of experiment, but they have provided a framework within which the effects for example of wall roughness [5] could be fitted. However, it is now generally recognized that recent detailed measurements of the structure of turbulent flow are making tenancy of the mixing hypothesis progressively more uncomfortable [6], [7], although the primitive state of experimental research has so far prevented replacing the theory with one more satisfactory.

The mixing analogy for turbulent flow will not be discussed further here, since many detailed summaries are available. Neither will any review be attempted of the current experimental investigations of LAUFER [8], KLEBANOFF [9], TOWNSEND [10], [11], and others, which it is to be hoped will lead first to a knowledge of the structure, and finally to an understanding of the mechanism, of turbulent shear flow.

In the absence of an adequate theory describing the turbulent mechanism, the present discussion will attempt to organize, rather than to explain, the experimental evidence which is available for the low-speed turbulent flat plate boundary layer. The general analysis is based on the principle of physical

similarity, using certain demonstrable properties of the boundary layer, and is later made specific by an appeal to experimental data.

The mean velocity distribution  $u(y)$  through the turbulent boundary layer may be taken to depend on four local parameters  $\delta$ ,  $\tau_w$ ,  $\varrho$ , and  $\mu$ ; a fifth parameter  $u_1$  is of course implied as the value of  $u$  when  $y = \delta$ . The first two quantities,  $\delta$  and  $\tau_w$ , depend on a length coordinate  $\xi$  which is not written explicitly, since it will be found that the Reynolds number  $R = u_1 \xi / \nu$  for the ideal boundary layer is adequately determined for a given profile by the assumptions already made in this and in the preceding section.

The function of six variables

$$g(u, y, \varrho, \mu, \delta, \tau_w) = 0 \quad (18)$$

may be conveniently written without loss of generality as

$$\frac{u}{u_\tau} = G\left(\frac{y u_\tau}{\nu}, \frac{y}{\delta}\right), \quad (19)$$

in terms of a characteristic velocity  $u_\tau$  and two characteristic lengths  $\delta$  and  $\nu/u_\tau$ , where

$$\tau_w = \varrho u_\tau^2. \quad (20)$$

Suppose that equation (19) can be specialized for the region near the wall, on the ground of a certain similarity observed experimentally. Both the laminar sublayer profile and the adjacent turbulent mean velocity profile near the surface are found to be independent of the boundary layer thickness  $\delta$ , so that

$$\frac{u}{u_\tau} = f\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right), \quad y \rightarrow 0. \quad (21)$$

Suppose further that in the outer region of the boundary layer similarity is observed with respect to a coordinate system attached to the edge of the layer and moving with the free stream. It is not surprising, if the shearing stress in this region is maintained by a turbulent transport process, that the velocity defect is found to be independent of the viscosity of the fluid. In fact, turbulent shear flows with a free boundary, such as wakes and jets, apparently have in common with the boundary layer the property that near the free boundary the characteristic length, when considering the distribution of mean velocity measured with respect to the outer fluid, is the width  $\delta$  of the shear layer. This observation is expressed by the velocity defect law, which in the usual form is written

$$\frac{u_1 - u}{u_\tau} = F\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad y \rightarrow \delta. \quad (22)$$

If now it is assumed that there exists a finite region in which both (21) and (22) are valid, it is easily shown ([12]; see also [13], [14]) that (19) in this region



must have the form

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (23)$$

or more specifically, in view of (21),

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + \varphi(0). \quad (24)$$

Note that the existence of equation (23) is a sufficient condition to insure the existence of equation (22) since, if (23) is valid throughout the outer part of the boundary layer,

$$\frac{u_1 - u}{u_\tau} = \varphi(1) - \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta}. \quad (25)$$

That the condition is also necessary is less commonly recognized. The equations (21) and (22), which are plausible on dimensional grounds and are supported by experimental evidence, and MILLIKAN'S demonstration of necessity, already cited, are together a less ambiguous basis for equation (24) than derivations involving specific assumptions about the mechanism of turbulent shear flow. In particular, the constant  $\kappa$  is introduced during a separation of variables in a manner which shows clearly that this parameter should not depend on the surface shearing stress or on the boundary layer thickness, although it may depend on the wall geometry.

Evaluation of equation (23) at the point  $y = \delta$  yields immediately the friction law

$$\frac{u_1}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_\tau}{\nu} + \varphi(1), \quad (26)$$

which may be applied directly to pipe or channel flow on replacing the boundary layer thickness by the pipe radius or channel half width. For a boundary layer, however, it is more convenient to replace the boundary layer thickness  $\delta$  in equation (26) by the momentum thickness  $\theta$ , with the result that

$$\frac{u_1}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R_\theta}{c_1 - c_2 (u_\tau/u_1)} + \varphi(1). \quad (27)$$

This expression follows immediately from equation (26) and the definitions

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy \quad (28)$$

and

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy, \quad (29)$$

on assuming that equation (22) is valid throughout the boundary layer. The

parameters  $c_1$  and  $c_2$  are then defined by

$$c_1 = \frac{u_1}{u_\tau} \cdot \frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 F\left(\frac{y}{\delta}\right) d\frac{y}{\delta} \quad (30)$$

and

$$c_2 = \left(\frac{u_1}{u_\tau}\right)^2 \left(\frac{\delta^* - \theta}{\delta}\right) = \int_0^1 F^2\left(\frac{y}{\delta}\right) d\frac{y}{\delta}, \quad (31)$$

so that the form parameter  $\delta^*/\theta$  is given by

$$\frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1}{1 - \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{u_\tau}{u_1}}. \quad (32)$$

Furthermore, in view of the obvious relationship

$$c_f = \frac{\tau_w}{q} = 2 \left(\frac{u_\tau}{u_1}\right)^2, \quad (33)$$

it is clear that equation (27) is the analog of equation (17) in supplying, for the turbulent boundary layer, a connection between local friction coefficient and local momentum thickness Reynolds number which may be taken both as a definition and as a test for uniqueness.

In order to complete the discussion of the ideal turbulent boundary layer, however, it is necessary to adopt a convention for defining a Reynolds number  $R$ . The present restricted idea of uniqueness implies a function

$$2 \frac{dR_\theta}{dR} = h(R_\theta) \quad (34)$$

which may be integrated to yield a relationship

$$R = H(R_\theta), \quad (35)$$

on satisfying the initial condition  $R = 0$  when  $R_\theta = 0$ . If the surface shearing stress is always positive, then  $R_\theta$  is a monotonically increasing function of  $R$ , and the initial condition in question can obviously be satisfied.

However, the integration can be carried out, and a precise definition of  $R$  achieved, only if the function  $h$  of equation (34) is specified for all positive values of  $R_\theta$ . But the function in question is defined experimentally, so that the extrapolation to arbitrarily small Reynolds numbers is not itself unique; in fact, it is not certain that the extrapolated function will be finite or even integrable at  $R_\theta = 0$ . For the present, the dependence of  $dR_\theta/dR$  on  $R_\theta$  expressed by equation (34) will simply be identified with equation (27), and a discussion of the necessarily asymptotic correspondence between these expressions will be postponed until the experimental evidence has been reviewed.



The transcendental form of equation (27) makes direct integration difficult. However, in the absence of pressure gradient and roughness, the local friction coefficient and the momentum thickness for the ideal turbulent boundary layer may be taken to be related by the momentum integral equation,

$$c_f = \frac{\tau_w}{q} = 2 \frac{d\theta}{d\xi} = 2 \frac{d}{d\xi} \int_0^\delta \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy, \quad (36)$$

according to equations (8), (29), and (33) above. In the present notation, using (22) and (26) in turn in (36),

$$dR = e^{-\kappa\varphi(1)} e^{\kappa(u_1/u_\tau)} \left[ c_2 - \kappa c_2 \frac{u_1}{u_\tau} + \kappa c_1 \left( \frac{u_1}{u_\tau} \right)^2 \right] d \frac{u_1}{u_\tau}. \quad (37)$$

It is obvious from equation (27) that  $R_\theta$  vanishes, implying  $R = 0$ , when  $u_\tau/u_1 = c_1/c_2$ . With this initial condition, the definite integral of equation (37) is the turbulent flat plate friction law for  $c_f(R)$ ,

$$c_f R = 2 c_1 e^{-\kappa\varphi(1)} e^{\kappa\sqrt{2}/c_f} \left\{ 1 - \left( \frac{2}{\kappa} + \frac{c_2}{c_1} \right) \sqrt{\frac{c_f}{2}} + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{c_2}{c_1} \right) c_f \right\} - \frac{2 c_1}{\kappa^2} e^{-\kappa\varphi(1)} e^{\kappa(c_2/c_1)} c_f. \quad (38)$$

As a check on this expression, it is readily verified that equation (9),

$$c_F R = 2 R_\theta = \int_0^R c_f dR,$$

has equation (27) as a definite integral when the local friction coefficient is evaluated from (38). Further, it follows that the mean and local friction coefficients are always finite, and are in fact equal in the limit  $R = 0$ , for the particular friction law implied by functional similarity. Finally, anticipating numerical values to be obtained later, the last term on the right side of equation (38) is of order  $40 c_f$  compared to terms of order  $c_f R$ , and may safely be neglected;

$$c_f R = 2 c_1 e^{-\kappa\varphi(1)} e^{\kappa(u_1/u_\tau)} \left[ 1 - \frac{u_\tau}{u_1} \left( \frac{2}{\kappa} + \frac{c_2}{c_1} \right) + \frac{2}{\kappa} \left( \frac{u_\tau}{u_1} \right)^2 \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{c_2}{c_1} \right) \right]. \quad (39)$$

The corresponding expression for the mean friction coefficient, from equation (27), is

$$c_F R = 2 R_\theta = 2 c_1 e^{-\kappa\varphi(1)} e^{\kappa(u_1/u_\tau)} \left( 1 - \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{u_\tau}{u_1} \right). \quad (40)$$

In summary, the two equations (39) and (40) above define the ideal local and mean turbulent friction coefficients for a flat plate in terms of four empirical velocity profile parameters  $\kappa$ ,  $\varphi(1)$ ,  $c_1$ , and  $c_2$ . These parameters may sup-

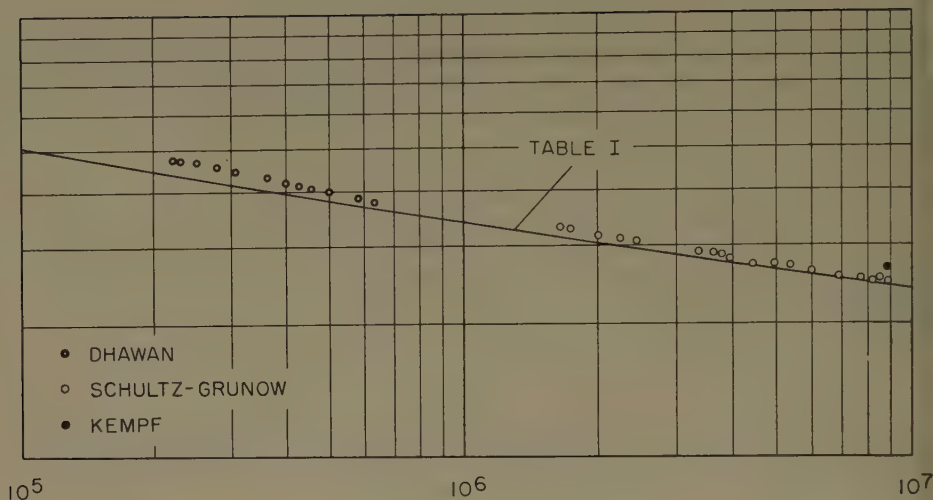


Figure 1

Direct Measurements of Local Turbulent Friction in Low-Speed Flow.

posedly be determined by simultaneous local measurements of velocity profile and surface friction at a single Reynolds number, and extrapolation of the resulting friction formulae to arbitrary Reynolds numbers may then be undertaken with the same degree of confidence which is attached to the hypotheses of similarity underlying equations (21) and (22).

#### 4. Experimental Literature<sup>1)</sup>

While the turbulent boundary layer on a flat plate has been the subject of a great deal of experimental research, it is not easy to find reliable measurements of mean velocity profile and surface shearing stress made under identical experimental conditions. Before discussing the available measurements, therefore, it is convenient to provide a short catalog of several special techniques which have been used for determining local surface friction.

The derivative  $d\theta/dx$  supposedly gives the surface shear directly, provided that the flow is uniform and two-dimensional. Since differentiation of experimental data is necessary, large errors may occur unless careful and complete measurements are made of the various velocity profiles. Alternatively, extrapolation toward the wall of the turbulent shear  $-\rho \overline{u'v'}$  or of the sublayer

<sup>1)</sup> The writer is indebted to Dr. G. B. SCHUBAUER and Mr. P. S. KLEBANOFF of the National Bureau of Standards, Washington; to Dipl.-Phys. W. TILLMANN of the 'Max-Planck-Institut für Strömungsforschung', Göttingen; and to Dr. F. R. HAMA of the State University of Iowa, Iowa City, for their courtesy in providing numerical data for some of the measurements cited here.



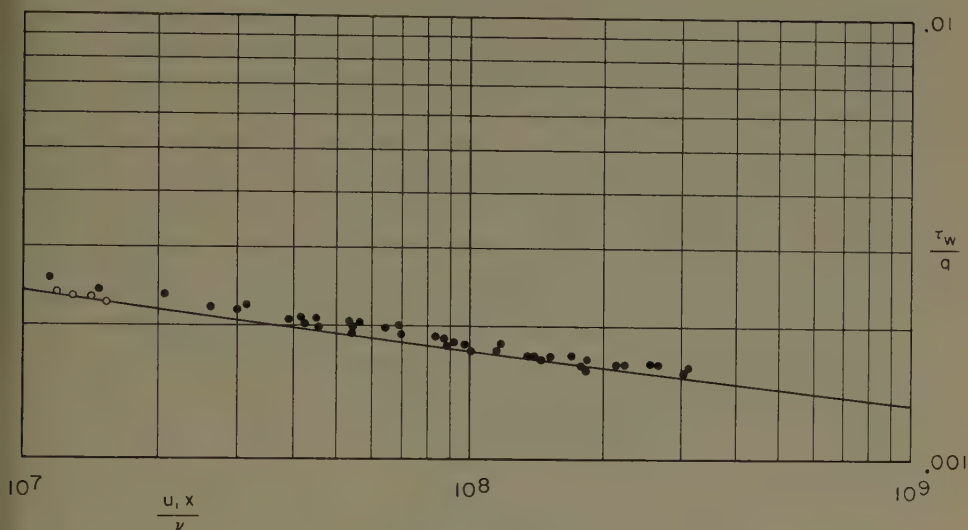


Figure 1 continued

laminar shear  $\mu \partial u / \partial y$  implies unusual nicety of experimental technique. Direct measurement of the shearing force on an isolated element of the surface, although it requires a considerable effort in the development of special instrumentation, appears to be the most reliable method available at present. Finally, a device based on a relationship between heat transfer and momentum transfer in the sublayer has been used successfully, but must be calibrated by comparison with a primary standard obtained by one of the more conventional methods of local friction measurement.

The floating element technique is conspicuous among these methods for the consistency of the data obtained. Omitting a discussion of a meteorological application by SHEPPARD [15], three papers describing direct measurements of surface shearing stress on a flat plate in low-speed flow have appeared in the boundary layer literature.

KEMPF [16] in 1929 measured the surface friction at several stations on the flat bottom of a ship model. The presence of a standing wave system on the free surface of the towing tank introduced into the friction coefficient data a scatter which is apparently systematic in terms of the Froude number, but random in terms of the Reynolds number; no attempt has been made to remove this scatter in the data considered here for the first four stations. KEMPF's measurements were made at sufficiently large values of  $x$  so that the influence of the parameter  $x_0$  should be negligible. A criticism of the data can, however, be based on the possibility of secondary flow in the boundary layer, since the ship hull in question, even though flat-bottomed, was relatively narrow in its

lateral dimension. A further criticism of the measurements at the largest Reynolds numbers has been expressed by FALKNER [17] on the ground that the length of run may have been insufficient to guarantee steady flow near the aft end of the ship model.

SCHULTZ-GRUNOW [18] later used similar methods to measure the friction on the floor of a wind tunnel. Great care was taken to minimize pressure variations along and across the small gap provided for clearance around the floating element. The tunnel boundary layer was removed at an upstream slot, whose downstream lip formed the leading edge of the plate under investigation. Transition to turbulent flow occurred immediately downstream of the curved leading edge; however, there is some doubt about the magnitude of the parameter  $\alpha_0$ , especially since the Reynolds number was apparently varied by changing the velocity at a fixed station along the plate.

More recently, DHAWAN [4] has obtained further data on the turbulent skin friction on a flat plate by means of the floating element technique. DHAWAN was able to induce transition by means of leading edge curvature, and to confirm the existence of turbulent flow over most of the working surface by means of an axial impact pressure traverse near the plate surface.

The experimental data of KEMPF, SCHULTZ-GRUNOW, and DHAWAN are collected in Figure 1. The measurements appear to define a single curve over the range of Reynolds numbers from  $2 \times 10^5$  to  $4 \times 10^8$ , with a scatter so small as to be almost unprecedented in boundary layer research. In fact, it may be admitted that the present re-examination of the turbulent boundary layer problem was to a large extent inspired by the remarkable consistency of these local friction data.

The existence of a unique relationship between the ordinate and the slope of the momentum thickness distribution,  $\Theta(x)$ , has already been proposed as a criterion for uniqueness in the turbulent flat plate boundary layer. The immediate question is one of demonstrating that such a relationship exists for the experimental data, without necessarily identifying the resulting function for example with equation (27) above. In view of the wide variations which occur from one experiment to another in various factors which influence boundary layer transition, it is not obvious *a priori* that a state is ever reached in which the dependence of the turbulent boundary layer on its early history is no longer measurable in terms of the local mean properties of the flow.

With the restricted definition of uniqueness considered here, it is sufficient as a beginning to consider the momentum thickness distribution only. The measurements which are most useful for this purpose were made by WIEGHARDT in 1943, as part of an extensive research program carried out since 1939 in a boundary layer tunnel at the 'Institut für Strömungsforschung' at Göttingen. While this program has placed considerable emphasis on the determination of the drag of surface irregularities, including uniform roughness, and



on the investigation of turbulent boundary layer flow in a pressure gradient, the case of a flat plate boundary layer has also been investigated in some detail.

Continuity in these German experiments is provided by WIEGHARDT's velocity profile measurements in uniform flow, carried out at free stream velocities of 17.8 and 33.0 m/s respectively. In addition, SCHULZ-GRUNOW's experiments at 19.4 m/s were made in the same channel. Of these data, WIEGHARDT's mea-

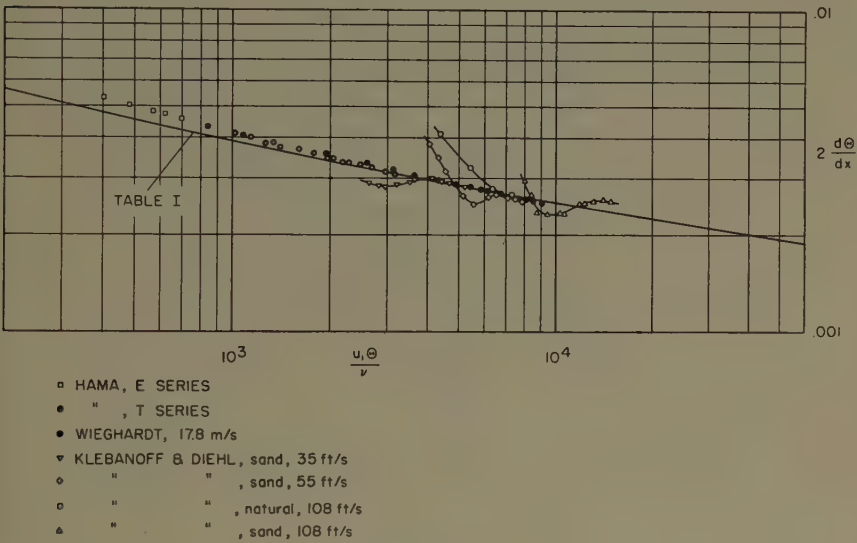


Figure 2  
Velocity Profile Friction Measurements in Low-Speed Flow.

surements at 17.8 m/s, by virtue of early transition and almost immediate coincidence for the actual and apparent origins, are in very good agreement with the properties of the ideal turbulent boundary layer. The local friction coefficients for this series, obtained by differentiating the experimental momentum thickness distribution, are plotted against  $R_\theta$  in Figure 2.

Some recent measurements in a flat plate boundary layer at the National Bureau of Standards, reported by KLEBANOFF and DIEHL [19], were undertaken in part to test the hypothesis of uniqueness for thick turbulent boundary layers produced for example by initial roughness. Figure 2 shows the relationship between  $2 d\theta/dx$  and  $R_\theta$  observed in experiments with natural transition at a free stream velocity of 108 ft/s, and with initial sand roughness at 35, 55, and 108 ft/s. Except in the last instance, the most downstream data are in good agreement with WIEGHARDT's curve; the agreement is in fact better than might be expected considering the uncertainty in the local friction coefficients. Exam-

ination of the experimental velocity profiles shows that the present criterion for uniqueness is equivalent to the test proposed by KLEBANOFF and DIEHL, of similarity in the velocity distribution, and serves equally well to identify the profiles which should be studied in detail.

Finally, HAMA [20] has published some velocity profile measurements in turbulent boundary layers, and his experimental values for the distribution of  $\Theta(x)$  have been used to obtain the local friction coefficients plotted in Figure 2.

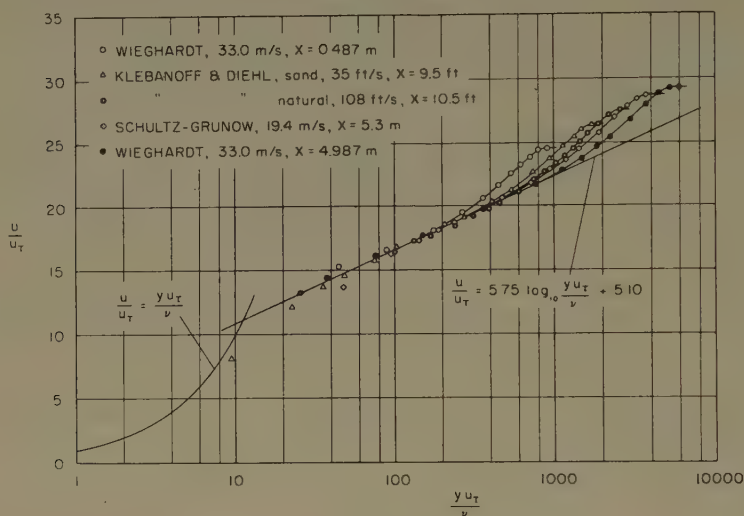


Figure 3  
The Law of the Wall.

Several velocity profiles which should be representative of the fully developed turbulent boundary layer are shown in Figure 3, in the coordinate system of equation (21), in order to exhibit the occurrence of a logarithmic relationship in the profile near the surface. According to equation (24), the value of the parameter  $\kappa$  is determined by the slope of the straight line in the figure, and  $\varphi(0)$  by the intercept at  $y u_\tau / \nu = 1$ .

In establishing a value for the boundary layer thickness  $\delta$ , needed in determining the parameter  $c_1$  from equation (30), it has been found convenient to plot  $(1 - u/u_1)^{2/3}$  against  $y$  and to fit a straight line to the outer part of the profile in this coordinate system. The thickness  $\delta$  is defined as the intercept on the  $y$ -axis. This convention is neither new nor significant; it is suggested for example by the mixing length theory of PRANDTL when the shearing stress varies linearly with  $y$  and the mixing length is constant, but it is justified at present only by its convenience as a well-defined method for specifying the boundary layer thickness.

Figure 4 shows the profiles of Figure 3 in the coordinate system required by the velocity defect law, equation (22). Again fitting a straight line with a slope determined by  $\kappa$  to the logarithmic region, the intercept at  $y = \delta = \delta^* u_1/c_1 u_\tau$  is  $\varphi(1) - \varphi(0)$ , according to equations (24), (26), and (30).

This analysis of the turbulent velocity profiles has been carried out for all the data available to the writer, using a value of  $\kappa$  of 0.40 and determining values for  $\varphi(0)$ ,  $\varphi(1)$ ,  $c_1$ , and  $c_2$ , the latter from equation (31). For WIEGHARDT'S measurements at 33.0 m/s a modified procedure was followed, the local friction

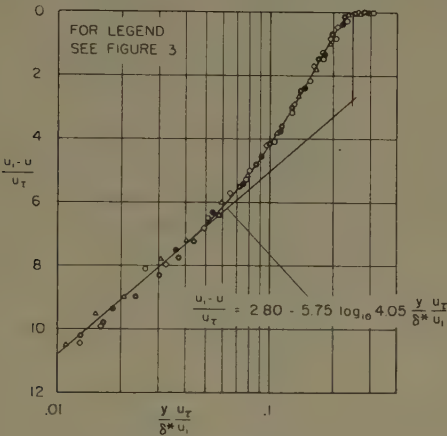


Figure 4  
The Velocity Defect Law.

coefficients being obtained from the expression (27) using the measured values of  $R_\theta$  and preliminary estimates for  $c_1$ ,  $c_2$ , and  $\varphi(1)$ . The collected values for several of the profile parameters are plotted against  $R_\theta$  in Figure 5, and show a satisfactory degree of consistency.

It is necessary finally to choose particular values for the parameters  $\kappa$ ,  $\varphi(1)$ ,  $c_1$ , and  $c_2$ , in order to complete the numerical analysis of the turbulent boundary layer. Recognizing the asymptotic nature of the treatment by emphasizing the data at the larger Reynolds numbers, then approximately

$$\kappa = 0.400 \quad , \quad \varphi(0) = 5.10 \quad , \quad \varphi(1) = 7.90 \quad , \quad c_1 = 4.05 \quad , \quad c_2 = 29.0 \quad .$$

These parameters have been used to evaluate  $R$ ,  $R_\theta$ ,  $c_F$ , and  $\delta^*/\theta$  as functions of  $c_f$  from equations (39), (40), and (32), and the resulting data are collected in Table I. The values tabulated in the first and second columns have been plotted in Figure 1, and those from the first and fourth columns in Figure 2. The values tabulated in the fourth and fifth columns are compared with the experimental values of the shape parameter  $\delta^*/\theta$  in Figure 6, the agreement



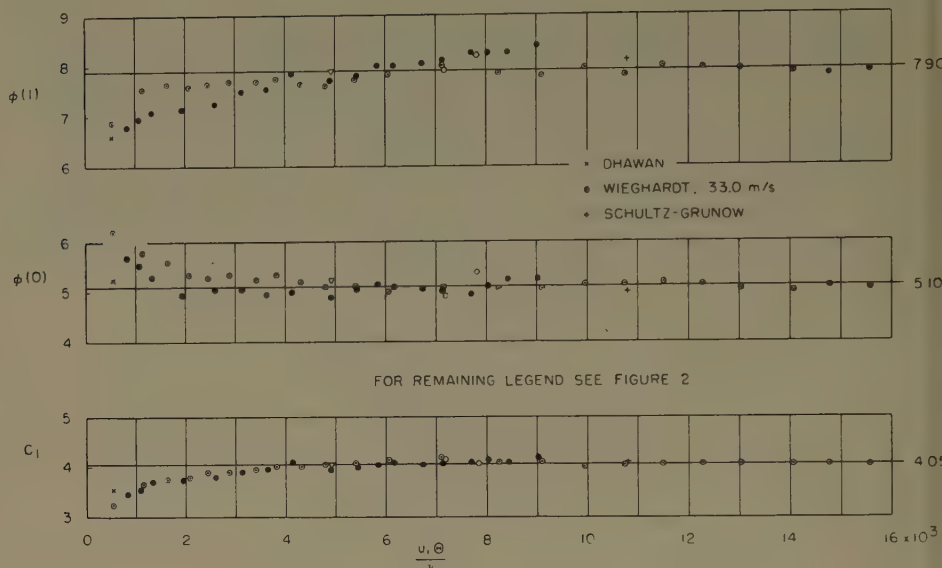


Figure 5  
Velocity Profile Parameters.

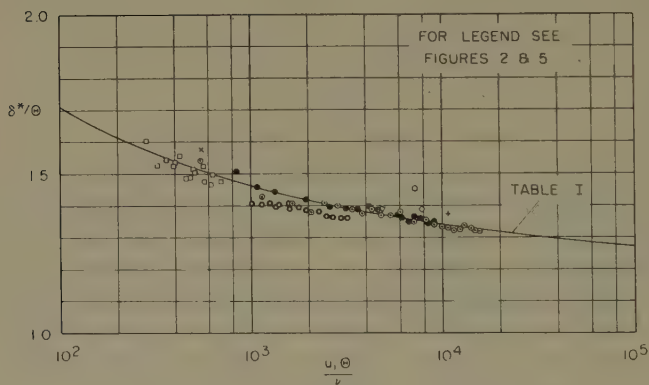


Figure 6  
Boundary Layer Shape Parameter.

here of course being expected since these experimental data were used to determine  $c_2$ .

It may be pointed out that the curves in Figures 1 and 2 are in no sense fitted to the measurements in question, since the ideal curves are based on detailed information about the velocity profiles, while the measurements are not. Furthermore, although experimental values for  $u_\tau$  were used to eliminate the

Table I

*Suggested Properties of the Ideal Turbulent Boundary Layer in a Fluid of Constant Density*

$c_f$	$R$	$c_F$	$R_\theta$	$\frac{\delta^*}{\theta}$	$\frac{u_\tau}{u_1}$
8.0	1.017	1.032	5.25	1.828	0.0632
7.8	1.143	1.005	5.75	1.809	0.0624
7.6	1.291	9.78	6.31	1.790	0.0616
7.4	1.463	9.52	6.96	1.772	0.0608
7.2	1.666	9.25	7.70	1.753	0.0600
7.0	1.906	8.98	8.55	1.735	0.0592
6.8	2.193	8.70	9.54	1.717	0.0583
6.6	2.536	8.43	1.069	1.699	0.0575
6.4	2.950	8.16	1.204	1.681	0.0566
6.2	3.45	7.89	1.362	1.663	0.0557
6.0	4.07	7.62	1.551	1.645	0.0548
5.8	4.84	7.35	1.776	1.628	0.0539
5.6	5.79	7.07	2.047	1.610	0.0529
5.4	7.01	6.80	2.383	1.593	0.0520
5.2	8.49	6.53	2.771	1.575	0.0510
5.0	1.050	6.26	3.29	1.558	0.0500
4.8	1.310	5.99	3.92	1.540	0.0490
4.6	1.653	5.72	4.73	1.523	0.0480
4.4	2.115	5.45	5.77	1.506	0.0469
4.2	2.748	5.19	7.13	1.488	0.0458
4.0	3.64	4.92	8.95	1.471	0.0447
3.8	4.91	4.66	1.143	1.453	0.0436
3.6	6.78	4.39	1.487	1.436	0.0424
3.4	9.72	4.13	2.004	1.419	0.0412
3.2	1.398	3.87	2.700	1.401	0.0400
3.0	2.107	3.60	3.80	1.383	0.0387
2.8	3.30	3.35	5.53	1.366	0.0374
2.6	5.43	3.09	8.38	1.348	0.0361
2.4	9.43	2.835	1.337	1.330	0.0346
2.2	1.755	2.581	2.265	1.311	0.0332
2.0	3.55	2.331	4.14	1.293	0.0316
1.8	8.00	2.083	8.33	1.274	0.0300
1.6	2.068	1.837	1.899	1.254	0.0283
1.4	6.43	1.594	5.13	1.234	0.0265
1.2	$2.583 \times 10^9$	1.354	1.748	1.213	0.0245
1.0	$1.518 \times 10^{10}$	1.117	8.48	1.191	0.0224

influence of Reynolds number in the analysis of the profiles, it was not necessary to know the magnitude of the Reynolds numbers in question. In fact, the discrepancies in Figure 1 are perhaps connected with the assumption that the real and apparent origins coincide for the experimental boundary layers; compare Figure 2, where local quantities only are involved.

Finally, WIEGHARDT's velocity profile data at a free stream velocity of 33.0 m/s are shown in detail in Figure 7 in order to illustrate the consistency of these particular measurements in terms of the law of the wall, equation (21), and the velocity defect law, equation (22).

WALL  
LAW

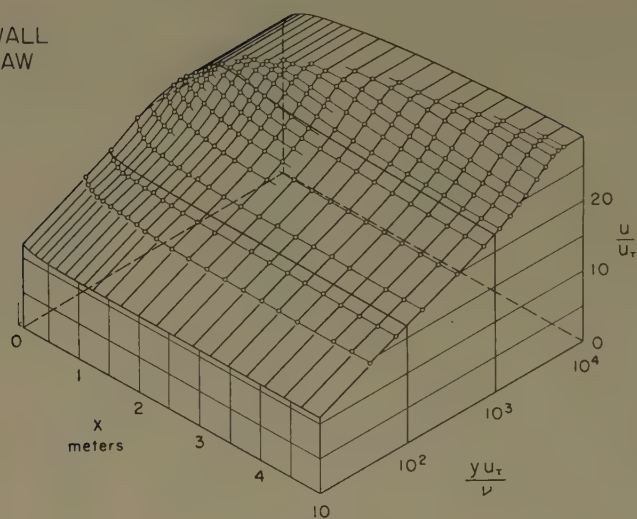


Figure 7a

Göttingen Measurements at 33.0 m/s.

VELOCITY  
DEFECT  
LAW

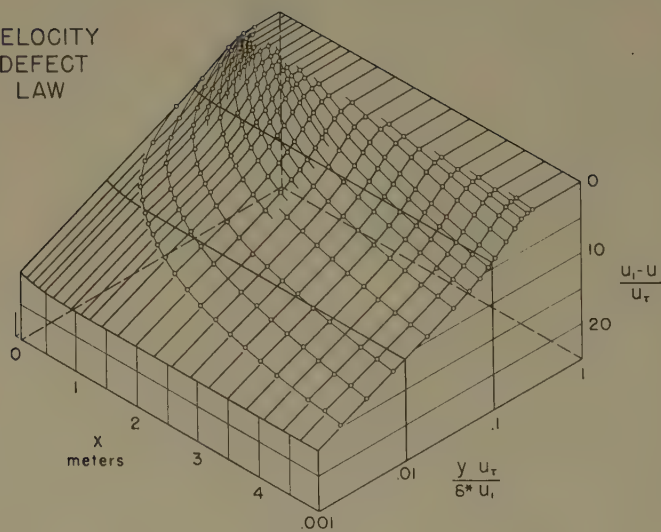


Figure 7b

Göttingen Measurements at 33.0 m/s.



## 5. Discussion

Most of the ideas which appear in the present study are not new. For example, equation (23) was postulated on empirical grounds, and equation (39) derived as a consequence, by VON KÁRMÁN in 1932 [21], and SCHULTZ-GRUNOW in 1939 carried an analysis of his experimental data almost to the point where the numerical results of the present paper could have been obtained. More recent papers by ROTTA [22], BAINES [23], and LANDWEBER [24] have discussed the representation of the turbulent boundary layer in terms of the law of the wall and the velocity defect law, but have not emphasized the physical interpretation of these formulae. The most important single element in the discussion, and one deserving a place among major contributions to the boundary layer literature, is the demonstration by MILLIKAN [12] that the two similarity laws together imply a logarithmic region in the velocity profile.

In reviewing the asymptotic nature of the turbulent boundary layer problem against the background of the similarity laws, it is obvious that extrapolation of a local friction law based on functional similarity to indefinitely small Reynolds numbers is permissible only in a restricted sense. For example, the parameter  $c_1$  is evaluated from equation (30); however, the integral in the latter expression neglects the dependence of the sublayer flow on Reynolds number, and so cannot be uniformly valid for all the experimental data considered here. The contribution of the sublayer flow to the integral defining the displacement thickness increases with decreasing Reynolds number, and the approximation involved in identifying the measured quantity  $u_1 \delta^*/u_\tau \delta$  with  $c_1$  for small values of  $R_\theta$  is apparent in Figure 5.

Although this fault is easily corrected at the cost of slightly more complicated formulae [24], it is evident that the two similarity laws cited here, and therefore equation (27), must inevitably fail at sufficiently small values of the Reynolds number. The region of common validity is marked by a logarithmic velocity profile, which is known to obtain only for values of  $y u_\tau/\nu$  greater than say 50. However, Figure 4 shows that the logarithmic law can describe the fully developed velocity profile only within the inner 20 percent of the boundary layer in any case, so that the smallest value of  $\delta u_\tau/\nu$  which satisfies both criteria is about 250; the corresponding value of  $u_1 \theta/\nu$  is about 700. Consulting the experiments, the approximate value of the abscissa in Figure 5, below which the parameters  $\varphi(0)$  and  $\varphi(1)$  appear to be no longer sensibly independent of Reynolds number, is  $u_1 \theta/\nu = 1500$ .

It is clear, from the evidence considered here, that the velocity defect law is of primary importance in determining the asymptotic properties of the ideal turbulent boundary layer for Reynolds numbers of technical interest. The probable physical significance of this fact may be discussed in terms of the charac-

teristic scales which were introduced early in the present organization of the boundary layer problem.

Turbulent fluid motion as observed experimentally is characterized at one extreme by the presence of large eddies, which are responsible for accepting energy from a prime mover, and at the other extreme by the presence of small eddies, in which viscous dissipation accompanies an approach to isotropy; the corresponding characteristic scales are distinct provided that the Reynolds number is sufficiently large. Although study of fluctuating phenomena in a turbulent boundary layer in terms of spectra and scale has not yet reached a state where it is possible always to distinguish cause and effect, it may be supposed that the characteristic lengths  $\delta$  and  $\nu/u_\tau$ , which appear in the two velocity laws are in fact useful measures of a macroscale and microscale for the turbulent flow.

Measurements of the space correlation across a turbulent channel flow by LAUFER [25], across a free jet by CORRSIN and UBEROI [26], and across a boundary layer by KLEBANOFF [9], together with the observation that a velocity defect law of the kind considered here holds at least approximately for such flows, are convincing evidence that large eddies are important in the general turbulent shear flow whether the boundaries are free or solid or both. Since the velocity defect is also the momentum defect for a fluid of constant density, it is to be expected that the defect law and the equations of mean motion together must determine the shearing stress not only at the wall but throughout the fully turbulent shear flow. Furthermore, both the velocity defect and the turbulent shearing stress have as a characteristic length the thickness  $\delta$ , which represents the large eddy structure and thus in some sense the history of the flow; the same characteristic length is found for the phenomenon of intermittent turbulence at the free edge of the shear flow [9], [11]. These observations perhaps explain some deficiencies in mixing hypotheses patterned after a molecular model, since the present assertion is first that the actual transport process is connected with the recent history of the motion as well as with purely local conditions, and second that momentum transport is accomplished by the largest eddies in the flow.

The physical significance of the law of the wall is not yet clearly recognized, except as a consequence of the constraint applied to the turbulent motion by the condition of vanishing velocity at the fixed boundary<sup>1)</sup>. The law of the wall appears to be related primarily to local conditions and thus to the small-scale turbulent structure, since the dimensionless velocity profile is found experimentally to be insensitive to variations in ambient pressure distribution [27] or to changes in the nature of the other boundaries of the flow. In this connection it is important to note that, although the law of the wall can be studied only in the presence of a finite shearing stress at the surface, the law is inherently incapable of providing any estimate of magnitude for the shear.

<sup>1)</sup> See *The Law of the Wall in Turbulent Shear Flow*, to be published separately.

The present study suggests strongly that the assumptions which lead to the logarithmic velocity distribution are in effect equivalent to the assumption that there is a region in the flow where the mean velocity is dependent on the small eddy structure and thus on the dissipation, while in the same region the momentum defect and shearing stress are dependent on the large eddy structure. Thus a search for a relationship between shear and velocity is in this sense a search for a relationship between the turbulent structures at large and small wave numbers, and so might be undertaken using methods which have been found useful in the analysis of isotropic turbulence.

The widespread current revival of interest in the theoretical and experimental aspects of the boundary layer problem can hardly fail to lead to important discoveries, both in a knowledge of the structure of turbulent shear flows and in the formulation of an adequate theory. In the meantime, the writer hopes that the discussion given here, of the more rudimentary properties of one such flow, may serve to allow the identification of a proper environment for further experimental research, and also may serve to provide a point of departure for study of the effects of pressure gradient, compressibility, and roughness.

#### REFERENCES

- [1] LAGERSTROM, P., and LIEPMANN, H. W., *Laminar Flow. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, Vol. IV, Section B (to be published).
- [2] DRYDEN, H. L., *Air Flow in the Boundary Layer Near a Plate*, NACA, TR 562 (1936).
- [3] LIEPMANN, H. W., *Investigations on Laminar Boundary Layer Stability and Transition on Curved Boundaries*, NACA, ACR 3H30 (W-107) (1943).
- [4] LIEPMANN, H. W., and DHAWAN, S., *Direct Measurements of Local Skin Friction in Low-Speed and High-Speed Flow*, Proc. First U. S. nat. Congr. appl. Mech. 869-874 (Chicago, 1951). See also DHAWAN, S., *Direct Measurements of Skin Friction*, GALCIT, Thesis (1951), or NACA, TN 2567 (1952).
- [5] ROTTA, J., *Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen*, Ing.-Arch. 18, 277-280 (1950).
- [6] LIEPMANN, H. W., and LAUFER, J., *Investigation of Free Turbulent Mixing*, NACA, TN 1257 (1947).
- [7] BATCHELOR, G. K., *Note on Free Turbulent Flows with Special Reference to the Two-Dimensional Wake*, JAS 17, 441-445 (1950).
- [8] LAUFER, J., *The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow*, U. S. Dept. Commerce, Nat. Bureau Standards, Washington, Rep. 1974 (1952) (to be published as NACA TN).
- [9] KLEBANOFF, P. S., *Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient*, U. S. Dept. Commerce, Nat. Bureau Standards, Washington, Rep. 2454 (1953) (to be published as NACA TN).
- [10] TOWNSEND, A. A., *The Eddy Viscosity in Turbulent Shear Flow*, Philos. Mag. [7th Series] 41, 890-906 (1950).
- [11] TOWNSEND, A. A., *The Structure of the Turbulent Boundary Layer*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 47, 375-395 (1951).
- [12] MILLIKAN, C. B., *A Critical Discussion of Turbulent Flows in Channels and Circular Tubes*, Proc. Vth Congr., Cambridge, Mass., 386-392 (1938).



- [13] VON MISES, R., *Some Remarks on the Laws of Turbulent Motion in Tubes*, Applied Mechanics, Theodore von Kármán Anniversary Volume, 317-327 (1941).
- [14] KAMPÉ DE FÉRIET, J., *Sur l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux plaques parallèles indéfinies*, Houille Blanche 3, 509-517 (1948).
- [15] SHEPPARD, P. A., *The Aerodynamic Drag of the Earth's Surface and the Value of von Kármán's Constant in the Lower Atmosphere*, PRSA 188, 208-222 (1947).
- [16] KEMPF, G., *Neue Ergebnisse der Widerstandsforschung*, Werfft, Reederei, Hafen 10, 234-239, 247-253 (1929).
- [17] FALKNER, V. M., *A New Law for Calculating Drag*, Aircraft Eng. 15, 65-69 (1943).
- [18] SCHULTZ-GRUNOW, F., *Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten*, Luftfahrtforschung 17, 239-246 (1940), translated as *New Frictional Resistance Law for Smooth Plates*, NACA, TM 986 (1941).
- [19] KLEBANOFF, P. S., and DIEHL, Z. W., *Some Features of Artificially Thickened Fully Developed Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient*, NACA, TN 2475 (1951).
- [20] HAMA, F. R., *The Turbulent Boundary Layer Along a Flat Plate*, I and II (in Japanese), Rep. Inst. Sci. Technol. Tokyo Imperial University 1, 13-16, 49-50 (1947).
- [21] VON KÁRMÁN, T., *Theorie des Reibungswiderstands. Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs*, 50-73 (Hamburg 1932).
- [22] ROTTA, J., *Über die Theorie der turbulenten Grenzschichten*, Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsforsch., Göttingen, No. 1 (1950); translated as *On the Theory of the Turbulent Boundary Layer*, NACA, TM 1344 (1953). See also *Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten*, Ing.-Arch. 19, 31-41 (1951); translated as *Contribution to the Calculation of Turbulent Boundary Layers*, U. S. Navy Dept., David W. Taylor Model Basin, Translation 242 (1951).
- [23] BAINES, W. D., *A Literature Survey of Boundary Layer Development on Smooth and Rough Surfaces at Zero Pressure Gradient*, State Univ. Iowa, Iowa City, Contract N8onr-500 (1951).
- [24] LANDWEBER, L., *The Frictional Resistance of Flat Plates in Zero Pressure Gradient* (to be published in: Trans. Soc. naval Arch. Marine Eng.).
- [25] LAUFER, J., *Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel*, NACA, TN 2123 (1950), TR 1053 (1951).
- [26] CORRSIN, S., and UBEROI, M. S., *Spectra and Diffusion in a Round Turbulent Jet*, NACA, TN 2124 (1950), TR 1040 (1951).
- [27] LUDWIG, H., and TILLMANN, W., *Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten*, Ing.-Arch. 17, 288-299 (1949); translated as *Investigations of the Wall Shearing Stress in Turbulent Boundary Layers*, NACA, TM 1285 (1950).

### Summary

Existing measurements of low-speed turbulent surface friction on a flat plate, in the absence of pressure gradient and roughness, are shown to be consistent with a simple analysis based on functional similarity in the velocity profile. In particular, the fully developed turbulent boundary layer is found to be unique within the accuracy of the experimental data, with uniqueness defined as the

existence of a definite correspondence between local friction coefficient and momentum thickness Reynolds number. The relationships known as the law of the wall and the velocity defect law are found to describe the turbulent velocity profiles accurately for a considerable range of Reynolds numbers, and an effort is made to clarify the physical significance of these formulae. Finally, the proper definition of a length Reynolds number is discussed in terms of the asymptotic local properties of the ideal boundary layer, and numerical values for ideal mean and local friction coefficients are tabulated against Reynolds numbers based on momentum thickness and on distance from the leading edge.

### *Zusammenfassung*

Es wird gezeigt, dass vorhandene Messungen der turbulenten Wandschubspannung an der glatten ebenen Platte in inkompressibler Strömung ohne Druckgradient durch eine einfache Berechnung in Übereinstimmung gebracht werden können. Die Rechnung beruht auf einer funktionellen Ähnlichkeit der Geschwindigkeitsverteilung. Es wird im besonderen gefunden, dass die vollentwickelte turbulente Grenzschicht innerhalb der Messgenauigkeit einem eindeutigen Zusammenhang zwischen dem örtlichen Reibungskoeffizienten und der Reynoldsschen Zahl, bezogen auf die Impulsdicke, folgt. Die Beziehungen, die als Wandgesetz und Mittengesetz bekannt sind, beschreiben die Geschwindigkeitsverteilung genau innerhalb eines erheblichen Bereiches Reynoldsscher Zahlen, und es wird versucht, den physikalischen Inhalt dieser Gesetzmässigkeiten zu vertiefen. Abschliessend wird eine zweckmässige Definition der auf Plattenlänge bezogenen Reynoldsschen Zahl diskutiert, die auf dem asymptotischen örtlichen Zustand der idealen Grenzschicht beruht. Rechenwerte der idealen, mittleren und örtlichen Reibungskoeffizienten, bezogen auf beide obigen Definitionen der Reynoldsschen Zahl, werden tabelliert.

(Received: August 17, 1953.)

---

## Untersuchungen über Elektronenströmungen

VON JOHANNES MÜLLER, Berlin

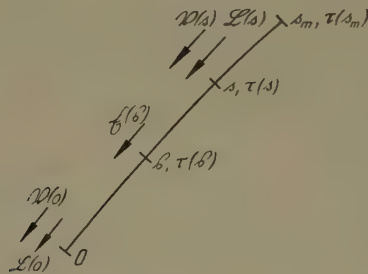
Gewisse Eigenschaften im Verhalten von Elektronenströmungen auf klassischer Grundlage werden aus Matrizendarstellungen gewonnen.

Die Bedingungen, wie sie durch die Erhaltungssätze für Energie und Ladung bei Elektronenströmungen auftreten, werden für den Fall kleiner Abweichungen vom stationären Zustand ermittelt. Die Anordnungen sollen sich also linear verhalten, das heisst, die Wirkung einer Anregung soll ohne gegenseitige Störung mit der Wirkung einer anderen Anregung überlagert werden können. Die Beeinflussung der Elektronen erfolgt nur über das elektromagnetische Feld. Wechselwirkungen zwischen Elektronen, die zu einer erheblichen Änderung ihrer Geschwindigkeit führen – das sind Zusammenstösse im Sinne der kinetischen Gastheorie –, werden vernachlässigt. Die Gesetzmässigkeiten werden für Strömungen mit einer und mehreren Teilchengeschwindigkeiten sowie mit

Geschwindigkeitsspektrum aufgestellt. Für ein Exponentialspektrum, wie es bei der Emission der Elektronen von einer Glühkathode entsteht, ergeben sich zwanglos Ausdrücke, wie sie unmittelbar für die Theorie der Schwankungen von Bedeutung sind, was mit dem energetischen Charakter des Rauschens zusammenhängt. Durch ein hohes Magnetfeld wird der räumliche Verlauf des Weges der Elektronen vorgeschrieben. Dadurch ist direkt nur das elektrische Feld in Richtung des Weges für die Bewegungsvorgänge verantwortlich.

### Aufstellung einer Leistungsbilanz

Gegeben sei eine Strömung als Strahl mit einer Teilchengeschwindigkeit an jedem Ort, deren Elektronen die Wegstrecke von  $O$  über  $s$ ,  $s$  bis  $s_m$  zurücklegen (Figur 1). Die statischen Laufzeiten betragen dabei  $0$ ,  $\tau(s)$ ,  $\tau(s)$  und  $\tau(s_m)$ , der Strahlgleichstrom  $i$ . Den statischen elektrischen Feldern ist längs der Wegstrecke ein schwaches elektrisches Wechselfeld überlagert. Wegen des starken magnetischen Führungsfeldes haben Wechselmagnetfelder keinen Einfluss. Zunächst werde nur ein Wechselfeld  $\mathfrak{E}(s)$  längs der Wegstrecke  $ds$  am Orte  $s$  angenommen. Dadurch erhalten die Elektronen eine infinitesimale Voltgeschwindigkeitsmodulation ( $= \mathfrak{B}$ -Modulation) von  $\mathfrak{E}(s) ds \exp j \omega t$  zur Zeit  $t$



Figur 1

Richtungen der positiven Halbwellen von Wechsel-Feldstärke  $\mathfrak{E}(s)$ , -Voltgeschwindigkeit  $\mathfrak{B}$  und -Konvektionsstrom  $\mathfrak{L}$  sowie die Bezeichnungen der Wegstrecken und Laufzeiten. Bewegungsrichtung der Elektronen von  $O$  bis  $s_m$ .

an  $s$ . Zur Zeit  $t + \tau(s) - \tau(s)$  werden diese Elektronen mit dem unverändert gebliebenen Zuwachs an  $\mathfrak{B}$ -Modulation am Punkt  $s$  ankommen (Erhaltung der Energie). Die statischen Laufzeiten sind eine eindeutige Funktion der Anfangsenergie oder der statischen Anfangsvoltgeschwindigkeit  $U_e$  der Elektronen, wenn zunächst keine Kreisbewegung mit Zyklotron-Frequenz senkrecht zu dem magnetischen Führungsfeld vorhanden ist. Für die Erhöhung der Laufzeit der zur Zeit  $t$  an  $s$  ankommenden Elektronen ergibt sich dann:

$$\frac{d[\tau(s) - \tau(s)]}{dU_e} \mathfrak{E}(s) ds e^{j\omega t - j\omega[\tau(s) - \tau(s)]}.$$



Mit dem Gleichstrom  $i$  multipliziert, ergibt dies den Überschuss der Elektronenraumladung zwischen  $s$  und  $s$  zur Zeit  $t$ . Aus der zeitlichen Änderung dieser Ladung erhält man den infinitesimalen Konvektionswechselstrom an  $s$  zur Zeit  $t$  (Erhaltung der Ladung). Das Vorzeichen hängt mit den gewählten Richtungen (Figur 1) zusammen.

$$\left. \begin{aligned} d\mathfrak{L}(s) &= -i \frac{d[\tau(s) - \tau(\tilde{s})]}{dU_e} \mathfrak{E}(\tilde{s}) d\tilde{s} j \omega e^{j\omega t - j\omega [\tau(s) - \tau(\tilde{s})]} \\ &= i \mathfrak{E}(\tilde{s}) e^{j\omega t} d\tilde{s} \frac{de^{-j\omega [\tau(s) - \tau(\tilde{s})]}}{dU_e} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Da es sich im folgenden stets um periodische Vorgänge handelt, wird die Zeitfunktion weggelassen. Wenn auf der gesamten Wegstrecke ein Wechselfeld besteht, so erhält man durch Integration die durch Feldmodulation entstehende Konvektionsstrommodulation (=  $\mathfrak{L}$ -Modulation), da bei kleinen Abweichungen die Einzelwirkungen sich addieren, aus:

$$\mathfrak{L}'(s) = i \int_0^s \mathfrak{E}(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{de^{-j\omega [\tau(s) - \tau(\tilde{s})]}}{dU_e} \quad (2)$$

Die Rückwirkungsfelder infolge der Abstrahlung elektromagnetischer Energie durch die veränderlichen Bewegungen der Elektronen in ihrer Gesamtheit (die Strahlung des einzelnen Elektrons wird vernachlässigt) sind in der angenommenen Wechselfeldverteilung  $\mathfrak{E}(s)$  mit enthalten. Wird (1) auf die Anfangs- $\mathfrak{B}$ -Modulation angewendet [ $\mathfrak{E}(\tilde{s}) d\tilde{s}$  wird durch  $\mathfrak{B}(0)$  ersetzt,  $\tau(\tilde{s}) = 0$ ], so ergibt sich dieser Anteil der  $\mathfrak{L}(s)$ -Modulation zu:

$$\mathfrak{L}''(s) = i \mathfrak{B}(0) \frac{de^{-j\omega \tau(s)}}{dU_e} \quad (3)$$

Damit erhält man für die gesamte  $\mathfrak{L}$ -Modulation an  $s$ , wenn noch die Wirkung der Anfangs- $\mathfrak{L}$ -Modulation hinzugenommen wird:

$$\mathfrak{L}(s) = i \int_0^s \mathfrak{E}(\tilde{s}) d\tilde{s} \frac{de^{-j\omega [\tau(s) - \tau(\tilde{s})]}}{dU_e} + i \mathfrak{B}(0) \frac{de^{-j\omega \tau(s)}}{dU_e} + \mathfrak{L}(0) e^{-j\omega \tau(s)} \quad (4)$$

Wenn die Feldverteilung erzwungen wird, wie bei der Ableitung der Leistungsbilanz, so kann die Differentiation nach  $U_e$  vor das Integral gesetzt werden. Aus (4):

$$\mathfrak{L}(s) = i \frac{d}{dU_e} \left[ \int_0^s \mathfrak{E}(\tilde{s}) d\tilde{s} e^{-j\omega [\tau(s) - \tau(\tilde{s})]} + \mathfrak{B}(0) e^{-j\omega \tau(s)} \right] + \mathfrak{L}(0) e^{-j\omega \tau(s)} \quad (5)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist nichts anderes als die  $\mathfrak{B}$ -Modulation an  $s$ .

$$\mathfrak{B}(s) = \int_0^s \mathfrak{E}(\xi) d\xi e^{-j\omega[\tau(s) - \tau(\xi)]} + \mathfrak{B}(0) e^{-j\omega\tau(s)}. \quad (6)$$

Wenn das Wechselfeld nicht erzwungen wird, so gilt die folgende Gleichung (7)

$$\mathfrak{L}(s) = i \frac{d\mathfrak{B}(s)}{dU_e} + \mathfrak{L}(0) e^{-j\omega\tau(s)} \quad (7)$$

nicht bei endlicher Stromstärke, da eine Rückwirkung auf die Feldverteilung wegen der sich verändernden Raumladungsverteilung beim Übergang zu einer um  $dU_e$  erhöhten statischen Anfangsvoltgeschwindigkeit für die gesamte Strömung eintritt. Dieser Einfluss geht gegen Null, wenn der Gleichstrom der Strömung gegen Null geht. Allgemein gilt:

$$\mathfrak{L}(s) = \Delta i \frac{d\mathfrak{B}(s)}{dU_e} + \mathfrak{L}(0) e^{-j\omega\tau(s)}. \quad (8)$$

Durch Umformung kann aus (6) nach dem Wechselfeld  $\mathfrak{E}(s)$  aufgelöst werden:

$$\mathfrak{E}(s) = e^{-j\omega\tau(s)} \frac{d[\mathfrak{B}(s) e^{j\omega\tau(s)}]}{ds}. \quad (9)$$

Die durch das elektromagnetische Wechselfeld der Strömung zugeführte Leistung beträgt:

$$\mathfrak{N} = \int_0^{s_m} \mathfrak{E}(s) ds \mathfrak{L}^*(s) \quad (10)$$

$\mathfrak{E}(s)$  aus (9),  $\mathfrak{L}(s)$  aus (7) eingesetzt und partiell integriert, ergibt:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{B}(s_m) \mathfrak{L}^*(s_m) - \mathfrak{B}(0) \mathfrak{L}^*(0) - j\omega \int_0^{s_m} \mathfrak{B}(s) \mathfrak{B}^*(s) i \frac{d^2\tau(s)}{dU_e ds} ds. \quad (11)$$

Diese Gleichung besagt, dass die durch das Wechselfeld zugeführte Wirkleistung [Realteil von  $\mathfrak{N}$ ] und die am Anfang der Strömung zugeführte Wirkleistung [Realteil von  $\mathfrak{B}(0) \mathfrak{L}^*(0)$ ] zusammen die abgegebene Wirkleistung am Ende der Strömung [Realteil von  $\mathfrak{B}(s_m) \mathfrak{L}^*(s_m)$ ] ergibt. Da die Voltgeschwindigkeit stets ein Mass für die Energie der Elektronen ist, gilt die Beziehung auch bei relativistischer Massenänderung. Das dritte Glied auf der rechten Seite von (11) stellt eine reine Blindleistung dar. Werden die Wechselgeschwindigkeiten eingeführt, so ergibt sich nichtrelativistisch dieser Anteil zu:

$$j\omega \int_0^{s_m} m_0 v(s) v^*(s) dn.$$

1) Durch \* wird der konjugiert-komplexe Wert bezeichnet.

Dies ist die Blindleistung der Energie der Wechselbewegung und entspricht vorzeichenmässig einer Induktivität.  $dn$  sind die Anzahl der Elektronen mit Wechselgeschwindigkeiten  $v(s)$  und Ruhemasse  $m_0$ .

Es soll nunmehr der Einfluss einer Bewegung senkrecht zum magnetischen Führungsfeld untersucht werden. Zu diesem Zweck wird das Quadrat der Bewegungsgrösse senkrecht zu dem Führungsfeld

$$p_{\perp}^2 = p^2 - p_{\parallel}^2 = p^2 - (p \cdot e_B)$$

nach der Zeit differenziert.  $e_B$  ist der Einheitsvektor in Richtung der magnetischen Induktion. Unter Benützung des Bewegungsgesetzes

$$\frac{dp}{dt} = -e E - \frac{e [p \cdot B]}{m}$$

(bei Elektronen ist die Elementarladung  $e$  positiv einzusetzen) ergibt sich, wenn die ersten räumlichen Ableitungen der Induktion stetig sind:

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = -2e(p_{\perp} \cdot E_{\perp}) - 2 \frac{p_{\perp}^2}{B} \cdot \frac{dB}{dq_{\perp}} u_{\perp}.$$

Dabei ist  $dB/dq_{\perp}$  die Änderung der Induktion in Richtung des augenblicklich bestehenden Impulses  $p_{\perp}$ . Wenn die Intensität des Magnetfeldes gegen  $\infty$  geht, verbleibt senkrecht zum Magnetfeld nur eine Kreisbewegung mit Zyklotron-Frequenz. Damit wird der zeitliche Mittelwert von  $(p_{\perp} \cdot E_{\perp})$  Null und von  $dB/dq_{\perp}$ , wegen der Quellenfreiheit der Induktion,  $-dB/2 ds$ . Es folgt:

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = \frac{p_{\perp}^2}{B} \cdot \frac{dB}{dt}; \quad \frac{p_{\perp}^2}{B} = \text{const} = \frac{p_{0\perp}^2}{B_0}.$$

Dies bedeutet, dass die Bewegungsgrösse  $p_{\perp}$  keine Modulation durch die Wechselfelder erfährt.  $p_{\perp}^2/B$  ist proportional dem Drall der Kreisbewegung, der mit  $B \rightarrow \infty$  gegen Null geht. Es kann jetzt angegeben werden, wie die Bildung von  $d\tau/dU_e$  in (1) bei Vorhandensein einer Querbewegung vorzunehmen ist. Die Bewegungsgrösse senkrecht zum Führungsfeld  $p_{0\perp}$  am Anfang wird dabei unverändert gelassen. Wenn die statischen elektrischen und magnetischen Felder in ihrer Richtung nicht zusammenfallen, erfordert eine Realisierung derartiger Strömungen allerdings erhebliche Magnetfeldstärken. Die grundsätzliche Möglichkeit solcher geführter Strömungen ergibt die Berechtigung, das Verhalten von Strömungen mit Steuerungen in Fortschrittsrichtung in allgemeiner Weise zu behandeln. Die Ergebnisse können sofort auf Fälle angewendet werden, bei denen kein oder nur ein schwaches Magnetfeld besteht, wenn die Wirkungen von Querbewegungen (bedingt durch seitliche thermische Anfangsenergien oder durch Quersteuerung längs der Strömung) vernachlässigt werden können.

Die Wirkleistungsbilanz gilt auch für Elektronenwege mit Umkehrstelle. Während bei Wegen ohne Umkehrstelle die Integrationsgrenzen fest sind, ver-



ändert sich der Integrationsbereich durch die Ortsänderung der Umkehrstelle. Ein Teil des Weges, der die Umkehrstelle enthält, werde für sich betrachtet. Dieser Teil soll einmal so gross sein, dass am Anfang und Ende dieser Teilstrecke die Wechselgrössen klein gegenüber den statischen Werten sind, andererseits soll er so klein sein, dass trotz der zeitlich veränderlichen Vorgänge die Verhältnisse in diesem Gebiet als statisch angesehen werden können, so dass die Wirkleistung am Anfang und Ende dieser kurzen Wegstrecke die gleiche ist. Die Wirkleistungsbilanz wird damit durch derartige Umkehrstellen nicht verändert.

### I. Strömungen ohne Anfangssteuerung

Die Wirkleistungsbilanz kann auf beliebig viele Einzelströmungen erweitert werden. In einem elektromagnetischen Hohlraum<sup>1)</sup> ohne elektromagnetische Verluste sollen sich  $m$  Einzelströmungen befinden, deren Wege an den Begrenzungen des Hohlraums beginnen und enden. Damit wird den Strömungen insgesamt weder elektromagnetische Wirkleistung entnommen noch zugeführt, und die Wirkleistung am Anfang der Wege ist gleich der Wirkleistung am Ende der Wege. Seien  $\mathfrak{L}_\mu$  und  $\mathfrak{B}_\mu$  bzw.  $\mathfrak{L}^{(\mu)}$  und  $\mathfrak{B}^{(\mu)}$  die Wechselkonvektionsströme und die Wechselvoltgeschwindigkeiten am Anfang bzw. am Ende des  $\mu$ -ten Weges, so gilt bei  $m$  Einzelströmungen:

$$\sum_{\mu=1}^m \mathfrak{B}^{(\mu)} \mathfrak{L}^{(\mu)*} + \mathfrak{L}^{(\mu)} \mathfrak{B}^{(\mu)*} = \sum_{\mu=1}^m \mathfrak{B}_\mu \mathfrak{L}_\mu^* + \mathfrak{L}_\mu \mathfrak{B}_\mu^* . \quad (12)$$

Auf beiden Seiten steht die doppelte Wirkleistung. Bei kleinen Abweichungen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den End- und Anfangsmodulationen, darstellbar durch  $2m$  Gleichungen. Die Anfangsmodulationen sind bei Strömungen ohne Anfangssteuerung voneinander unabhängig. Die Endmodulationen des  $\mu$ -ten Weges als lineare Funktion von den Anfangsmodulationen sind angeschrieben<sup>2)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L}^{(\mu)} &= \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{L}_1} \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{B}_1} \mathfrak{B}_1 + \dots + \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{L}_m} \mathfrak{L}_m + \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{B}_m} \mathfrak{B}_m , \\ \mathfrak{B}^{(\mu)} &= \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_1} \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{B}_1} \mathfrak{B}_1 + \dots + \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_m} \mathfrak{L}_m + \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{B}_m} \mathfrak{B}_m \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$(\mu = 1, 2, \dots, m)$

<sup>1)</sup> Der Hohlraum dient dabei nur dazu, den Energieaustausch auf definierte Stellen durch Vermeidung von Abstrahlung zu lokalisieren, und ist bei der Anwendung auf Anordnungen, bei denen dies ohne weiteres berechtigt ist, nicht wesentlich.

<sup>2)</sup> Derartige Koeffizienten sind bei ebener Strömung von F. B. LLEWELLYN, Bell Syst. Tech. J. 14, 652 (1935); F. B. LLEWELLYN und L. C. PETERSON, Proc. I. R. E. 32, 144 (1944), und bei ebenen Strömungen mit Ionen von W. O. SCHUMANN, Naturwissenschaften 31, 140 (1943), berechnet worden. H. W. KÖNIG, Arch. elektr. Übertr., Nov. 1952, 445, findet bei ebener Strömung mit einer Trägergeschwindigkeit eine einfache Beziehung zwischen den Koeffizienten.

Anmerkung bei der Korrektur: Durch die Verwendung der Voltgeschwindigkeit anstatt der Geschwindigkeit werden die Beziehungen formal vollständig analog denjenigen bei einem verlustfreien System von  $m$  Leitungen bzw. einem verlustlosen  $(2m)$ -Pol.

oder in Matrix-Form:

$$\mathfrak{A} \begin{vmatrix} \mathfrak{L}_1 \\ \mathfrak{B}_1 \\ \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{L}^{(1)} \\ \mathfrak{B}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix} \quad (14a)$$

und transponiert

$$(\mathfrak{L}^{(1)} \mathfrak{B}^{(1)} \dots) = (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \mathfrak{A}' \quad (14b)$$

Die  $(2m)$ -reihige quadratische Matrix  $\mathfrak{A}$  lautet:

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{L}_{1\mathfrak{L}_1} & \mathfrak{L}_{1\mathfrak{B}_1} & \mathfrak{L}_{1\mathfrak{L}_2} & \mathfrak{L}_{1\mathfrak{B}_2} & \dots \\ \mathfrak{B}_{1\mathfrak{L}_1} & \mathfrak{B}_{1\mathfrak{B}_1} & \mathfrak{B}_{1\mathfrak{L}_2} & \mathfrak{B}_{1\mathfrak{B}_2} & \dots \\ \mathfrak{L}_{2\mathfrak{L}_1} & \mathfrak{L}_{2\mathfrak{B}_1} & \mathfrak{L}_{2\mathfrak{L}_2} & \mathfrak{L}_{2\mathfrak{B}_2} & \dots \\ \mathfrak{B}_{2\mathfrak{L}_1} & \mathfrak{B}_{2\mathfrak{B}_1} & \mathfrak{B}_{2\mathfrak{L}_2} & \mathfrak{B}_{2\mathfrak{B}_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (15)$$

(14b) wird in der folgenden Weise erweitert:

$$(\mathfrak{L}^{(1)} \mathfrak{B}^{(1)} \dots) \begin{vmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} \\ \mathfrak{L}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix}^* = (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \mathfrak{A}' \begin{vmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} \\ \mathfrak{L}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix}^* = (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{L}_1 \\ \dots \end{vmatrix}^* \quad (16)$$

Auf der linken Seite steht dann die doppelte Wirkleistung der Endmodulationen, die mittels (12) durch die doppelte Wirkleistung der Anfangsmodulationen ersetzt wird. (14a) werde links mit der Vertauschungsmatrix  $\mathfrak{C}$  multipliziert. Dadurch wird die 2. mit der 1., die 4. mit der 3. Zeile usf. vertauscht. Multiplikation der  $\mathfrak{A}$ -Matrix rechts mit  $\mathfrak{C}$  bewirkt die entsprechende Spaltenvertauschung.  $\mathfrak{C} \mathfrak{A} \mathfrak{C}$  ergibt keine Vertauschung. Aus (14a) entsteht:

$$\mathfrak{C} \mathfrak{A} \mathfrak{C} \begin{vmatrix} \mathfrak{L}_1 \\ \mathfrak{B}_1 \\ \dots \end{vmatrix} = \mathfrak{C} \begin{vmatrix} \mathfrak{L}^{(1)} \\ \mathfrak{B}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} \\ \mathfrak{L}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix} = \mathfrak{C} \mathfrak{A} \mathfrak{C} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{L}_1 \\ \dots \end{vmatrix} = \mathfrak{A} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{L}_1 \\ \dots \end{vmatrix} \quad (17)$$

Für  $\mathfrak{C} \mathfrak{A} \mathfrak{C}$  wird  $\overline{\mathfrak{A}}$  gesetzt.  $\overline{\mathfrak{A}}$  geht aus  $\mathfrak{A}$  durch Vertauschung der 2. Zeile und Spalte mit der 1. Zeile und Spalte usf. hervor. Es gilt  $\overline{\mathfrak{A}'} = \mathfrak{A}'$  und  $\mathfrak{A}^{-1} = \overline{\mathfrak{A}}$ . Die Reihenfolge von Vertauschung und Transponierung bzw. Bildung der inversen Matrix ist gleichgültig. Die Determinanten von  $\mathfrak{A}$  und  $\overline{\mathfrak{A}}$  sind gleich. Der konjugiert-komplexe Wert von (17) gebildet und in (16) eingesetzt, ergibt:

$$(\mathfrak{L}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \mathfrak{A}' \overline{\mathfrak{A}}^* \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{L}_1 \\ \dots \end{vmatrix}^* = (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{L}_1 \\ \dots \end{vmatrix}^* \quad (18)$$

Die Gleichung ist für beliebige Anfangsmodulationen erfüllt, wenn:

$$\mathfrak{A}' \overline{\mathfrak{A}^*} = E \quad \text{und transponiert} \quad \mathfrak{A} \overline{\mathfrak{A}'^*} = E. \quad (19)$$

$\mathfrak{A}'^*$  ist damit die zu  $\mathfrak{A}$  inverse Matrix  $\mathfrak{A}^{-1}$ , und wenn die Elemente von  $\mathfrak{A}$  die Bedingung (19) erfüllen, stellt  $\mathfrak{A}$  eine Transformation dar, bei der die Wirkleistung unverändert bleibt.  $E$  ist die Einheitsmatrix. Da die Multiplikation in (19) vertauschbar ist, ergeben sich sowohl durch Zeilen-Spalten- wie durch Spalten-Zeilen-Multiplikation Beziehungen zwischen den Elementen. Die gleichen Ergebnisse erhält man durch Zeilen-Zeilen- und Spalten-Spalten-Multiplikation von  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{A}^*$ . Spalten-Spalten-Multiplikation liefert Gesetzmässigkeiten, die unmittelbar mit der übertragenen Leistung in Verbindung gebracht werden können. Multiplikation gleicher Zeilen bzw. Spalten muss 1, verschiedener 0 ergeben.

Aus der Spaltenmultiplikation von  $\mathfrak{A}$  mit  $\overline{\mathfrak{A}^*}$  folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu - 1 \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\mu \overline{\mathfrak{A}^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_\mu}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{L}_\mu}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad (20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\mu - 1 \overline{\mathfrak{A}^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{B}_\mu}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{B}_\mu}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad (21)$$

liefert je  $m$  reelle Gleichungen für je  $m$  Unbekannte.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu - 1 \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\sigma \overline{\mathfrak{A}^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{L}_\sigma}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (\mu, \sigma = 1, 2, \dots, m) \quad (22)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\sigma - 1 \overline{\mathfrak{A}^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{B}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{B}_\sigma}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (\mu, \sigma = 1, 2, \dots, m) \quad (23)$$

liefert je  $(m^2 - m)/2$  verschiedene komplexe Gleichungen für je  $m^2 - m$  Unbekannte.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu - 1 \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\sigma - 1 \overline{\mathfrak{A}^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{B}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{L}_{\nu \mathfrak{B}_\sigma}^* = \begin{cases} 1 & (\mu = \sigma) \\ 0 & (\mu \neq \sigma) \end{cases} \end{array} \right\} \quad (\mu, \sigma = 1, 2, \dots, m) \quad (24)$$



liefert  $m^2$  komplexe Gleichungen für  $2m^2$  Unbekannte. Es ergeben sich insgesamt  $2m^2 + m$  verschiedene Gleichungen für  $4m^2$  Unbekannte. Da bei  $m$  Strömungen  $4m^2$  Koeffizienten mit  $8m^2$  Bestimmungsstücken (Betrag, Phase) vorliegen, sind durch die Wirkleistungsbilanz die Hälfte derselben dadurch festgelegt. Es zeigt sich, dass man keineswegs beliebige Bestimmungsstücke vorschreiben und die andere Hälfte daraus ermitteln kann. Multipliziert man (20) bis (24) der Reihe nach mit  $\mathfrak{L}_\mu \mathfrak{L}_\mu^*, \mathfrak{B}_\mu \mathfrak{B}_\mu^*, \mathfrak{L}_\mu \mathfrak{L}_\sigma^*, \mathfrak{B}_\mu \mathfrak{B}_\sigma^*, \mathfrak{L}_\mu \mathfrak{B}_\sigma^*$ , so stellen die linken Seiten von (20) und (21) die doppelte Wirkleistung bei reiner  $\mathfrak{L}$ - bzw.  $\mathfrak{B}$ -Modulation dar, während der Realteil von (22) bis (24) die wechselseitige Wirkleistung der Endmodulationen ergeben. Nur wenn die  $\mathfrak{L}$ - und  $\mathfrak{B}$ -Anfangsmodulationen in der gleichen Strömung wirken, ist die Wirkleistung der Endmodulationen nicht Null. Durch Zeilen-Zeilen-Multiplikation von  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{A}^*$  ergeben sich weitere Gleichungen, die aber keine neuen Beziehungen für die Elemente liefern, da sämtliche Möglichkeiten der Wirkung beliebiger Anfangsmodulationen durch die obigen Gleichungen bereits erfasst sind. Es handelt sich dabei um Umformungen, die aus den Gleichungen (20) bis (24) durch Vertauschung der gesteuerten mit den steuernden Modulationen hervorgehen. Es folgt für  $\mu, \sigma = 1, 2, \dots, m$ :

$$\sum_{\nu=1}^m \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\nu} \mathfrak{L}_{\sigma\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{L}_{\sigma\mathfrak{L}_\nu}^* = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{\nu=1}^m \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\nu} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_\nu}^* = 0, \quad (26)$$

$$\sum_{\nu=1}^m \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\nu} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_\nu}^* = \begin{cases} 1 & (\mu = \sigma) \\ 0 & (\mu \neq \sigma) \end{cases} \quad (27)$$

Durch Bildung der Determinante von (19) ergibt sich, dass  $|\mathfrak{A}|$  komplex ist und den Betrag 1 hat. Dies bedeutet, dass bei periodischen Vorgängen keine Anfangsmodulationen eingestellt werden können, bei denen die Endmodulationen Null sind.

Bei den bisherigen Ausführungen findet eine Zu- oder Abstrahlung elektromagnetischer Wirkleistung in bezug auf die Gesamtströmung nicht statt. Um das Verhalten der Strömungen gegenüber äusseren anregenden elektromagnetischen Feldern und insbesondere die Vierpoleigenschaften zu gewinnen, werden zwei Klemmenpaare 1 und 2 eingeführt. An diesen Klemmenpaaren werden Hilfsströmungen  $m+1$  (an 1) und  $m+2$  (an 2) angebracht. Wenn die Anschlüsse punktförmig sind, so ist die Laufzeit dieser Hilfsströmungen Null. Ist dies nicht der Fall, so sollen die Ladungsträger der Hilfsströmungen die grösste Geschwindigkeit, und zwar Lichtgeschwindigkeit  $c_0$  besitzen. Dabei ist die Laufzeit  $\tau$ . In beiden Fällen sind dadurch viele Koeffizienten der Hilfsströmungen

Null. Sämtliche Koeffizienten, die  $\mathfrak{B}_{m+1}$  bzw.  $\mathfrak{B}_{m+2}$  als steuernde Modulationen aufweisen, sind bis auf

$$\mathfrak{B}_{m+1\mathfrak{B}_{m+1}} = e^{-j\omega\tau_{m+1}}, \quad \mathfrak{B}_{m+2\mathfrak{B}_{m+2}} = e^{-j\omega\tau_{m+2}}$$

Null. Ausserdem sind die Koeffizienten, die  $\mathfrak{L}_{m+1}$  bzw.  $\mathfrak{L}_{m+2}$  als gesteuerte Modulationen enthalten, bis auf

$$\mathfrak{L}_{m+1\mathfrak{L}_{m+1}} = e^{-j\omega\tau_{m+1}}, \quad \mathfrak{L}_{m+2\mathfrak{L}_{m+2}} = e^{-j\omega\tau_{m+2}}$$

Null. Im folgenden wird mit dem punktförmigen Anschluss ( $\tau = 0$ ) gearbeitet. Um die Verbindung mit dem äusseren System zu erhalten, wird

$$\mathfrak{B}_{m+1} = \mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{B}_{m+2} = \mathfrak{U}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}_{m+1} = -\mathfrak{Z}_1, \quad \mathfrak{L}_{m+2} = -\mathfrak{Z}_2$$

gesetzt. Durch die Wahl der Richtung der Einstromung wird erreicht, dass bei positivem Realteil von  $\mathfrak{U}\mathfrak{Z}^*$  Wirkleistung von aussen zugeführt wird.  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{U}^*$  wird mit den Koeffizienten der beiden Hilfsströmungen gerändert. Multiplikation gleicher Zeilen bzw. Spalten muss 1, verschiedener 0 ergeben. Die Beziehungen für die Koeffizienten der  $m$  Strömungen bleiben dabei ungeändert.

Spalte	$2\nu-1$	$2\nu$	$2m+1$	$2m+2$	$2m+3$	$2m+4$	Zeile
$\mathfrak{U} =$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\nu}$	$\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	$\dots$	$-\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{Z}_1}$	$0$	$-\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{Z}_2}$
	$\dots$	$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\nu}$	$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	$\dots$	$-\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Z}_1}$	$0$	$-\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Z}_2}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$0$	$0$	$\dots$	$1$	$0$	$0$
	$\dots$	$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}_\nu}$	$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu}$	$\dots$	$-\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Z}_1}$	$1$	$-\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Z}_2}$
	$\dots$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$1$	$0$
	$\dots$	$\mathfrak{U}_{2\mathfrak{L}_\nu}$	$\mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}_\nu}$	$\dots$	$-\mathfrak{U}_{2\mathfrak{Z}_1}$	$0$	$-\mathfrak{U}_{2\mathfrak{Z}_2}$
	$\dots$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$	$0$

(28)

$\overline{\mathfrak{U}^*} =$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\nu}$	$\dots$	$0$	$-\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Z}_1}$	$0$
	$\dots$	$\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\nu}$	$\dots$	$0$	$-\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{Z}_1}$	$0$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	$\dots$	$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Z}_1}$	$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Z}_\nu}$	$\dots$	$1$	$-\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Z}_1}$	$0$
	$\dots$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$1$	$0$
	$\dots$	$\mathfrak{U}_{2\mathfrak{Z}_\nu}$	$\mathfrak{U}_{2\mathfrak{L}_\nu}$	$\dots$	$0$	$-\mathfrak{U}_{2\mathfrak{Z}_1}$	$1$
	$\dots$	$0$	$0$	$\dots$	$0$	$0$	$1$

(29)

Zeile  $2m + 2\mathfrak{A} \times$  Zeile  $2m + 3\overline{\mathfrak{A}^*}$ :

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_2} + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{S}_1}^* = \mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_\nu} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{S}_\nu}^* + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_\nu} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{Q}_\nu}^* . \quad (30)$$

Der Ausdruck für die wechselseitigen Impedanzen  $\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^*$  ist ein Mass für die in der Anordnung umgesetzte wechselseitige Wirkleistung. Ist  $\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^*$  Null, so bedeutet dies, dass die Wirkleistungen, die bei einer Anregung an 1 bzw. 2 allein in der Anordnung auftreten, einfach superponiert werden können bei einer gleichzeitigen Anregung an 1 und 2. Wird Index 2 gleich Index 1 gesetzt, so erhält man aus (30) den doppelten Eingangswirkwiderstand an 1:

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_1} + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_1}^* = \mathfrak{R}_{11} + \mathfrak{R}_{11}^* = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_\nu} \mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_\nu}^* + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_\nu} \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_\nu}^* \quad (31)$$

oder auch aus Zeile  $2m + 2\mathfrak{A} \times$  Zeile  $2m + 1\overline{\mathfrak{A}^*}$ .

Zeile  $2\mu - 1\mathfrak{A} \times$  Zeile  $2m + 1\overline{\mathfrak{A}^*}$ :

$$\mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{S}_1} = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_\nu}^* \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{Q}_\nu} + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_\nu}^* \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{S}_\nu} \quad (32)$$

Zeile  $2\mu\mathfrak{A} \times$  Zeile  $2m + 1\overline{\mathfrak{A}^*}$ :

$$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_1} = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_\nu}^* \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_\nu} + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_\nu}^* \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_\nu} \quad (33)$$

Die Koeffizienten der Endmodulationen gegenüber den Einströmungen am Klemmenpaar sind durch die Koeffizienten der  $m$  Strömungen und den  $2m$  induzierten Leerlaufspannungen am Klemmenpaar vollständig bestimmt.

Spalte  $2m + 3\mathfrak{A} \times$  Spalte  $2m + 2\overline{\mathfrak{A}^*}$ :

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_2} + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{S}_1}^* = \mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = \sum_{\mu=1}^m \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{S}_2} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_1}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_2} \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{S}_1}^* ; \quad (34)$$

Spalte  $2\nu - 1\mathfrak{A} \times$  Spalte  $2m + 2\overline{\mathfrak{A}^*}$ :

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_\nu} = \sum_{\mu=1}^m \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{Q}_\nu} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_1}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_\nu} \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{S}_1}^* ; \quad (35)$$

Spalte  $2\nu\mathfrak{A} \times$  Spalte  $2m + 2\overline{\mathfrak{A}^*}$ :

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_\nu} = \sum_{\mu=1}^m \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{S}_\nu} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_1}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_\nu} \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{S}_1}^* . \quad (36)$$

Die Formeln müssen so beschaffen sein, dass daraus erstens die unabhängige Serienschaltung bei entkoppelten Einzelströmungen hervorgeht. Zweitens muss



in den Formeln der Fall enthalten sein, dass die Strömungen, wenn sie sich nur in ihrem Gleichstromanteil unterscheiden, das Verhalten einer einzigen Strömung zeigen. Die erste Forderung wird in den quadratischen Formen für  $\Re_{12} + \Re_{21}^*$  dadurch erfüllt, dass keine Glieder auftreten, deren beide Faktoren verschiedenen Strömungen angehören. Bei den Beziehungen (32) bis (36) sind bei entkoppelten Einzelströmungen alle Koeffizienten für  $\nu \neq \mu$  Null, so dass ein Ausdruck verbleibt, der nur die Koeffizienten einer Strömung enthält. Im zweiten Fall ist die Wirkung einer  $\mathfrak{L}$ -Modulation in jeder Teilströmung die gleiche, und die Wirkung einer  $\mathfrak{B}$ -Modulation der einzelnen Teilströmungen unterscheidet sich entsprechend dem Gleichstromanteil, abgesehen von  $\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\nu}$ ,  $\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$  und  $\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$ . Hierbei gilt zum Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } \nu \neq \mu: \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\nu} &= [\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} - e^{-j\omega\tau}] \frac{i_\mu}{i}; \\ \text{für } \nu = \mu: \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\mu} &= [\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} - e^{-j\omega\tau}] \frac{i_\mu}{i} + e^{-j\omega\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Gleichung (30) geht unter Beachtung, dass  $\sum_{\nu=1}^m i_\nu/i = 1$ , über in:

$$\Re_{12} + \Re_{21}^* = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}}^* \frac{i_\nu}{i} + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}} \frac{i_\nu}{i} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{L}}^* = \mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}}^* + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{L}}^*. \quad (38)$$

Aus Gleichung (32) wird mit (37):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_1} &= \sum_{\nu=1, \nu \neq \mu}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}}^* \frac{i_\nu}{i} [\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} - e^{-j\omega\tau}] \frac{i_\mu}{i} + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}}^* \frac{i_\mu}{i} \left[ [\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} - e^{-j\omega\tau}] \frac{i_\mu}{i} + e^{-j\omega\tau} \right] \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}}^* \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}} \frac{i_\mu i_\nu}{i^2} \\ &= [\mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}}^* \mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}}^* \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}] \frac{i_\mu}{i}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

In analoger Weise ergeben auch die Gleichungen (33) bis (36) das Verhalten wie bei einer einzigen Strömung.

$\mathfrak{L}$ - und  $\mathfrak{B}$ -Modulation sind in bezug auf die Ergebnisse der Wirkleistungsbilanz gleichwertig. Eine Vertauschung von  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{B}$  in (20) bis (27), (30) bis (36) bei den Anfangsmodulationen allein, den Endmodulationen allein und den Anfangs- und Endmodulationen gleichzeitig führt insgesamt wieder zu den gleichen Beziehungen. Der Übergang von leer laufenden Klemmenpaaren zu kurzgeschlossenen Klemmenpaaren kann bei Einhaltung der Richtung von  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{U}$  durch Vertauschung von  $\mathfrak{J}$  mit  $\mathfrak{U}$  in den Formeln vorgenommen werden. Die wechselseitigen Impedanzen werden durch komplexe Steilheiten und die

Wirkwiderstände durch Wirkleitwerte ersetzt. Aus (30) bis (33) wird:

$$\mathfrak{I}_{11_2} + \mathfrak{I}_{11_1}^* = \mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}^* = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{I}_{1\varrho_\nu} \mathfrak{I}_{2\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{I}_{2\varrho_\nu}^*, \quad (40)$$

$$\mathfrak{I}_{11_1} + \mathfrak{I}_{11_2}^* = \mathfrak{S}_{11} + \mathfrak{S}_{11}^* = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{I}_{1\varrho_\nu} \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{I}_{1\varrho_\nu}^*, \quad (41)$$

$$\mathfrak{L}_{\mu 1_1} = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu}^* \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{B}_\nu} + \mathfrak{I}_{1\varrho_\nu}^* \mathfrak{L}_{\mu \varrho_\nu}, \quad (42)$$

$$\mathfrak{B}_{\mu 1_1} = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu}^* \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{B}_\nu} + \mathfrak{I}_{1\varrho_\nu}^* \mathfrak{B}_{\mu \varrho_\nu}. \quad (43)$$

Sind weitere Klemmenpaare vorhanden, so treten  $\varrho$  und  $\mathfrak{z}$  in  $\mathfrak{I}$ ,  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{S}$  an Stelle von 1 und 2. Liegt Rückwirkungsfreiheit vom  $\mathfrak{z}$ -ten zum  $\varrho$ -ten Klemmenpaar vor, so ist  $\mathfrak{R}_{\varrho \mathfrak{z}}$  bzw.  $\mathfrak{S}_{\varrho \mathfrak{z}}$  Null.

Bei nicht rein periodischen zeitlichen Vorgängen können die aus der Leistungsbilanz gewonnenen Beziehungen aus der  $\mathfrak{U}$ -Matrix nicht unmittelbar benutzt werden. Wenn die Anfangsmodulationen nach einer rein reellen, zeitlich ansteigenden Exponentialfunktion verlaufen, so ist die am Anfang der Strömungen zugeführte Leistung stets grösser als die Leistung am Ende der Strömungen. Trotzdem können die für rein periodische Vorgänge erhaltenen Beziehungen für nicht rein periodische Zeitfunktionen verwertet werden. Bei einer rein periodischen Zeitfunktion  $\exp j \omega t$  sind die Koeffizienten Funktion von  $j \omega$ . Bei nicht rein periodischen Zeitfunktionen mit komplexer Frequenz wird in den Formeln die reelle Frequenz durch die komplexe Frequenz ersetzt.

Ladung und Masse der Elektronen treten direkt in den Koeffizientenbeziehungen nicht auf. Die Beziehungen gelten deshalb nicht nur für Elektronen, sondern für beliebige Ladungsträger.

Es ist keineswegs erforderlich, dass die einzelnen Strömungen an den Begrenzungen des Hohlraums beginnen und enden. Anfangs- und Endpunkt können auch innerhalb des Hohlraums liegen. Zur Aufrechterhaltung der Kontinuität des Wechselkonvektionsstromes ist dann an diesen Punkten eine Wechselladung entsprechend  $\pm j \omega \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}$  (– Endpunkt, + Anfangspunkt) wirksam, die auf die Gültigkeit der Wirkleistungsbilanz keinen Einfluss hat.

Der Weg einer Strömung (Index  $\nu$ ) werde in zwei Teile geteilt. Die Laufzeit längs des ersten Wegstücks sei  $\tau_{\nu_1}$ . Zwischen den Koeffizienten, die durch  $\mathfrak{Q}$ -Modulation auf dem gesamten Weg und den beiden Teilstücken vorgenommen wird, besteht dann folgende Beziehung:

$$\mathfrak{Q}_{\varrho_\nu} = \mathfrak{Q}_{\varrho_{\nu_1}} + \mathfrak{Q}_{\mathfrak{B}_{\nu_2}} e^{-j \omega \tau_{\nu_1}}. \quad (44a)$$

$\mathfrak{Q}$  ist eine gesteuerte Modulation, die der  $\nu$ -ten Strömung selbst nicht angehört.

$\mathfrak{Q}_{\nu_2}$  gibt zum Beispiel die Wirkung an, wenn eine  $\mathfrak{Q}$ -Modulation nur längs des zweiten Teilstückes besteht.

Die Ladungsträger sollen den  $\nu$ -ten Weg einmal in der einen Richtung,  $\vec{\mathfrak{Q}}$ -Modulation und in umgekehrter Richtung  $\vec{\mathfrak{Q}}$ -Modulation durchlaufen. Sei  $\tau_v$  die maximale Laufzeit und  $\tau_v(s)$  die ortsabhängige Laufzeit, gerechnet vom Anfang der  $\vec{\mathfrak{Q}}$ -Modulation, so ist die erzwungene Verteilung des Wechselkonvektionsstromes durch die  $\vec{\mathfrak{Q}}$ - bzw.  $\vec{\mathfrak{Q}}$ -Modulation,  $\vec{\mathfrak{Q}} \exp -j \omega \tau_v(s)$  bzw.  $-\vec{\mathfrak{Q}} \exp -j \omega [\tau_v - \tau_v(s)]$ . Angenommen, die Strömungen in dem verlustlosen elektromagnetischen Hohlraum haben alle verschwindende Raumladung, so sind die magnetischen Feldstärken und Ströme in den Begrenzungen des Hohlraumes, herrührend von der Stromstärke eines infinitesimalen Stromelements, mit der Stromstärke desselben in Phase. Sei  $h(s)$  der Proportionalitätsfaktor zwischen Stromstärke eines Stromelements und der interessierenden Stromstärke an einer beliebigen Stelle des Hohlraums, so bestimmen sich die Koeffizienten  $\mathfrak{Z}_{\vec{\mathfrak{Q}}\nu}^*$  und  $\mathfrak{Z}_{\vec{\mathfrak{Q}}\nu}$  zu:

$$\mathfrak{Z}_{\vec{\mathfrak{Q}}\nu}^* = \int_0^{s_m} h(s) e^{-j \omega \tau_v(s)} ds; \quad \mathfrak{Z}_{\vec{\mathfrak{Q}}\nu} = - \int_0^{s_m} h(s) e^{-j \omega [\tau_v - \tau_v(s)]} ds.$$

Hieraus folgt für die Beziehung zwischen den Koeffizienten:

$$\mathfrak{Z}_{\vec{\mathfrak{Q}}\nu}^* = -\mathfrak{Z}_{\vec{\mathfrak{Q}}\nu}^* e^{-j \omega \tau_v}. \quad (44b)$$

Bei den elektrischen Feldern und Spannungen an beliebigen Stellen des Hohlraums gilt:

$$\mathfrak{U}_{\vec{\mathfrak{Q}}\nu}^* = \mathfrak{U}_{\vec{\mathfrak{Q}}\nu}^* e^{-j \omega \tau_v}. \quad (44c)$$

Bei der Ableitung tritt an die Stelle der erzwungenen Verteilung des Wechselkonvektionsstromes die der Wechselladung. Derartige Umformungen werden im Abschnitt II bei anfangsgesteuerten Strömungen benötigt.

Für den einfachsten Fall einer Strömung mit einer Trägersgeschwindigkeit soll ermittelt werden, welche Bestimmungsstücke der Koeffizienten frei gewählt werden können. Es wird laufend durchnummeriert. Ungerader Index bedeutet  $\mathfrak{Q}$ -Modulation, gerader Index  $\mathfrak{B}$ -Modulation. Es wird gewählt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{1\mathfrak{Q}_1} &= a_{11} = a_{11} e^{j \varphi_{11}}; & \mathfrak{Q}_{1\mathfrak{B}_1} &= a_{12} = a_{12} e^{j \varphi_{12}}; \\ \mathfrak{B}_{1\mathfrak{Q}_1} &= a_{21} = a_{21} e^{j \varphi_{21}}; & \mathfrak{B}_{1\mathfrak{B}_1} &= a_{22} = a_{22} e^{j \varphi_{22}}. \end{aligned}$$

Zeilenmultiplikation von  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{A}^*$  ergibt:

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \overline{\mathfrak{A}^*} = \begin{vmatrix} a_{22}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{11}^* \end{vmatrix},$$

$$a_{11} a_{22}^* + a_{12} a_{21}^* = 1; \quad a_{11} a_{12}^* + a_{12} a_{11}^* = 0; \quad a_{21} a_{22}^* + a_{22} a_{21}^* = 0. \quad (45)$$



Durch Umformung aus (45) gewinnt man:

$$\frac{a_{11}}{a_{11}^*} = \frac{a_{22}}{a_{22}^*} = -\frac{a_{12}}{a_{12}^*} = -\frac{a_{21}}{a_{21}^*} \quad (46)$$

und hieraus die Phasenbeziehungen:

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{12} + \frac{\pi}{2} = \varphi_{21} + \frac{\pi}{2}. \quad (47)$$

Dabei sind die Phasen um  $\pi$  unbestimmt. Das Vorzeichen wird deshalb zu den  $a$ -Werten genommen, die nicht als die stets positiven Beträge anzusehen sind. Aus der ersten Gleichung von (45) folgt:

$$a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21} = 1. \quad (48)$$

Damit können ein Phasenwert und drei  $a$ -Werte freigewählt werden. Drei Phasenwerte und ein  $a$ -Wert sind dann festgelegt. Die Beziehung  $a_{11}/a_{11}^* = -a_{21}/a_{21}^*$ , die nicht unmittelbar aus (45) folgt, kann direkt durch Multiplikation der Spalte 1 von  $\mathfrak{A}$  mit Spalte 2 von  $\mathfrak{A}^*$  erhalten werden.

Die geringste Anzahl der Koeffizienten bei  $m$  Strömungen beträgt  $2m$ , und zwar muss mindestens ein Koeffizient in jeder Zeile und Spalte von  $\mathfrak{A}$  stehen, damit die Determinante nicht Null werden kann. Die Verteilung der Koeffizienten ist dabei nicht willkürlich, sondern muss so erfolgen, dass bei der Bildung der  $\bar{a}$ -Matrix das gleiche Bild für diesen Spezialfall der kleinsten Koeffizientenzahl entsteht, damit bei der Produktbildung von  $\mathfrak{A} \mathfrak{A}^*$  eine Einheitsmatrix zustande kommt. Sei bei  $m = 2$  nur  $a_{13}$ ,  $a_{24}$ ,  $a_{32}$  und  $a_{41}$  nicht Null, so ergeben sich die Koeffizientenbedingungen zu:

$$a_{13} a_{24}^* = 1; \quad a_{32} a_{41}^* = 1. \quad (49)$$

Auch hierbei können die Koeffizienten nicht willkürlich gewählt werden.

### *Differentialbeziehungen*

Wenn ein Geschwindigkeitsspektrum vorliegt, geht die Gleichstromstärke in jeder Strömung gegen Null. Damit kann die Gleichung (8) angewendet werden, deren Glied mit  $Ai$  erweitert wird zu:

$$\mathfrak{Q}_{v\mathfrak{X}} = Ai_v \frac{d\mathfrak{B}_{v\mathfrak{X}}}{dU_v}. \quad (50)$$

Zwischen der Wechselvoltgeschwindigkeit und dem Wechselkonvektionsstrom an einer beliebigen Stelle der  $v$ -ten Strömung, herrührend von einer Modulation  $\mathfrak{X}$ , besteht damit dieser Zusammenhang. Bei  $\mathfrak{X}$  kann es sich um die Anfangsmodulationen der anderen Strömungen oder um die Einströmung bzw. erzwungene Spannung an den Klemmenpaaren handeln, das heisst um solche primären Modulationen, die eine Beeinflussung der  $v$ -ten Strömung nur indirekt

auf dem Umweg über das elektrische Wechselfeld bewirken.  $U_v$  (Abkürzung für  $U_{ev}$ ) sei die statische Anfangsvoltgeschwindigkeit der Strömung  $v$ . Eine ähnliche Beziehung kann mittels (4) erhalten werden. Zu diesem Zweck wird die durch Feldmodulation der Gesamtströmung mit Geschwindigkeitsspektrum entstehende Konvektionswechselstromdichte  $l(s, x, y)$  und der durch  $\mathfrak{L}$ - und  $\mathfrak{B}$ -Modulation in der  $v$ -ten Strömung erzwungene Konvektionswechselstrom  $\mathfrak{L}_v(s)$  in die Gleichungen für die elektromagnetischen Felder eingeführt:

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -j \omega \mu_0 \mathfrak{H}, \quad \text{rot } \mathfrak{H} = j \omega \varepsilon_0 \mathfrak{E} + l(s, x, y) + \mathfrak{L}_v(s). \quad (51)$$

Dabei ist:

$$l(s, x, y) = \frac{dF_0}{dF} \int_{U_{emin}}^{U_{emax}} \frac{d\mathfrak{L}}{dU_e} dU_e \int_0^s \mathfrak{E}(\mathfrak{s}, x, y) d\mathfrak{s} \frac{de^{-j\omega[\tau(s, x, y) - \tau(\mathfrak{s}, x, y)]}}{dU_e}, \quad (52)$$

$$\mathfrak{L}_v(s) = \Delta i_v \mathfrak{B}_v(o) \frac{de^{-j\omega\tau_v(s)}}{dU_v} + \mathfrak{L}_v(o) e^{-j\omega\tau_v(s)}. \quad (53)$$

$[d\mathfrak{L}/dU_e] dU_e$  ist die statische Stromdichte im Voltgeschwindigkeitsintervall  $U_e$  und  $U_e + dU_e$  eine Funktion der Koordinaten  $x, y$  auf der emittierenden Oberfläche. Der Faktor  $dF_0/dF$  trägt einem nichtparallelen magnetischen Führungsfeld Rechnung. Aus der Gleichung (53) ist ersichtlich, dass die erzwungene Verteilung des Konvektionswechselstromes, herrührend von einer  $\mathfrak{B}$ -Modulation, in der  $v$ -ten Strömung aus der erzwungenen Verteilung des Konvektionswechselstromes durch  $\mathfrak{L}$ -Modulation in der  $v$ -ten Strömung mittels Differentiation nach  $U_v$  und Multiplikation mit  $\Delta i_v$  entsteht. Zwischen den gesteuerten Modulationen  $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}_v}$  und  $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_v}$ , ausgelöst durch  $\mathfrak{B}_v$ - und  $\mathfrak{L}_v$ -Modulation, existiert die Beziehung:

$$\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}_v} = \Delta i_v \frac{d\mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_v}}{dU_v}. \quad (54)$$

Bei  $\mathfrak{Y}$  handelt es sich um Modulationen, die durch reine Feldmodulationen zustande kommen, Wechselvoltgeschwindigkeiten, Wechselkonvektionsströme der anderen Strömungen, Leerlaufspannungen und Kurzschlußströme an den Klemmen sowie das elektrische und magnetische Wechselfeld. Die Bildung von (54) ist nur dann streng zulässig, wenn  $U_v$  in den durch die Konvektionsströme erweiterten elektromagnetischen Gleichungen, abgesehen von den erzwungenen Verteilungen, nicht vorkommt.  $U_v$  ist jedoch in  $l(s, x, y)$  enthalten, aber nur mit einer Strömung mit infinitesimalem Gleichstromanteil verknüpft, so dass eine Rückwirkung zu vernachlässigen ist.

Die Koeffizienten, die sich auf die gleiche Strömung beziehen, setzen sich, abgesehen von dem durch reine Feldmodulation entstehenden Koeffizienten  $\mathfrak{B}_{v\mathfrak{L}_v}$ , aus zwei Teilen zusammen, die sich um eine Größenordnung unterscheiden.

$$\mathfrak{L}_{v\mathfrak{B}_v} = \check{\mathfrak{L}}_{v\mathfrak{B}_v} + \hat{\mathfrak{L}}_{v\mathfrak{B}_v}; \quad \mathfrak{L}_{v\mathfrak{L}_v} = \check{\mathfrak{L}}_{v\mathfrak{L}_v} + \hat{\mathfrak{L}}_{v\mathfrak{L}_v}; \quad \mathfrak{B}_{v\mathfrak{B}_v} = \check{\mathfrak{B}}_{v\mathfrak{B}_v} + \hat{\mathfrak{B}}_{v\mathfrak{B}_v}; \quad \mathfrak{B}_{v\mathfrak{L}_v} = \check{\mathfrak{B}}_{v\mathfrak{L}_v} + \hat{\mathfrak{B}}_{v\mathfrak{L}_v}. \quad (55)$$

Die ersten Glieder entstehen durch direkte Modulation. Aus (7) und (6) folgt:

$$\check{\mathfrak{L}}_{\nu\mathfrak{B}_\nu} = \Delta i_\nu \frac{de^{-j\omega\tau_\nu}}{dU_\nu}; \quad \check{\mathfrak{L}}_{\nu\mathfrak{Q}_\nu} = \check{\mathfrak{B}}_{\nu\mathfrak{B}_\nu} = e^{-j\omega\tau_\nu}. \quad (56)$$

Die zweiten Glieder entstehen auf dem Umweg über das elektrische Wechselfeld und können aber nicht aus dem Grenzübergang  $\mu = \nu$  der Koeffizienten  $\mathfrak{L}_{\nu\mathfrak{B}_\mu}$ ,  $\mathfrak{L}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}$ ,  $\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{B}_\mu}$  gewonnen werden. Die letzteren lassen sich mittels der Differentialbeziehungen durch  $\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}$  in folgender Weise darstellen:

$$\mathfrak{L}_{\nu\mathfrak{B}_\mu} = \Delta i_\nu \frac{d\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{B}_\mu}}{dU_\nu} = \Delta i_\nu \Delta i_\mu \frac{d^2\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}}{dU_\nu dU_\mu}; \quad (57)$$

$$\mathfrak{L}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu} = \Delta i_\nu \frac{d\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}}{dU_\nu}; \quad (58)$$

$$\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{B}_\mu} = \Delta i_\mu \frac{d\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}}{dU_\mu}. \quad (59)$$

Demgegenüber muss für  $\mu = \nu$  auf die Bestimmungsgleichungen (2) und (6) zurückgegangen werden.

$$\hat{\mathfrak{L}}_{\nu\mathfrak{B}_\nu} = \Delta i_\nu \int_0^s \mathfrak{E}_{\mathfrak{B}_\nu}(\xi) d\xi \frac{de^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]}}{dU_\nu} = \Delta i_\nu^2 \int_0^s \frac{d\mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\nu}(\xi)}{dU_\nu} d\xi \frac{de^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]}}{dU_\nu} \quad (60)$$

$$\check{\mathfrak{L}}_{\nu\mathfrak{Q}_\nu} = \Delta i_\nu \int_0^s \mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\nu}(\xi) d\xi \frac{de^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]}}{dU_\nu} \quad (61)$$

$$\hat{\mathfrak{B}}_{\nu\mathfrak{B}_\nu} = \int_0^s \mathfrak{E}_{\mathfrak{B}_\nu}(\xi) d\xi e^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]} = \Delta i_\nu \int_0^s \frac{d\mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\nu}(\xi)}{dU_\nu} d\xi e^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]}. \quad (62)$$

Durch Addition von (61) und (62) folgt:

$$\hat{\mathfrak{L}}_{\nu\mathfrak{Q}_\nu} + \hat{\mathfrak{B}}_{\nu\mathfrak{B}_\nu} = \Delta i_\nu \frac{d}{dU_\nu} \int_0^s \mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\nu}(\xi) d\xi e^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]} \quad (63)$$

$$= \Delta i_\nu \frac{d\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\nu}}{dU_\nu}. \quad (64)$$

Durch Vergleich von (64) mit (58) und (59) für  $\mu = \nu$  ist der Unterschied bei gleichem Index zu erkennen. Sind noch Einzelströmungen mit diskreter Geschwindigkeit und endlicher Gleichstromstärke vorhanden, so ändern sich zwar wertmässig die Koeffizienten, die Differentialbeziehungen bleiben erhalten, können aber nur auf die Einzelströmungen selbst angewendet werden, wenn ihre Gleichstromstärke gegen Null geht.

## Integralbeziehungen

Unter Benutzung der Differentialbeziehungen werden nunmehr die durch Matrizenmultiplikation gewonnenen Summenausdrücke umgeformt. Bei Summe (22) werde die Umformung vorgenommen, die sich bei den anderen Summen (20) und (21), (23) bis (27) in ähnlicher Weise wiederholt. Aus der Summe (22) werden vier Glieder für  $\nu = \mu$  und  $\nu = \sigma$  herausgenommen, da zwei Glieder ihren Wert sprunghaft ändern. Es folgt:

$$0 = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{L}_{\nu\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{L}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{L}_{\nu\mathfrak{L}_\sigma}^* \quad (\nu \neq \mu, \sigma) \quad (65)$$

$$+ \mathfrak{L}_{\sigma\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{L}_{\sigma\mathfrak{L}_\sigma}^* + \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\sigma}^* .$$

Unter Beachtung von (55), (56) und (58) sind die beiden mittleren Einzelglieder von erster Ordnung in der Gleichstromstärke klein gegenüber den beiden anderen Einzelgliedern und werden vernachlässigt. Bei Verwendung von (58) in der Summe ergibt sich (67). Wenn die Unterteilung des Spektrums in diskrete Einzelströmungen genügend fein ist, kann mit  $\nu = \mu$  und  $\nu = \sigma$  summiert werden. Der wahre Koeffizient  $\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\mu}$  hat zwar seinen Wert gegenüber  $\mathfrak{L}_{\nu\mathfrak{L}_\mu}$  sprunghaft geändert. Der Wert von  $\mathfrak{L}_{\nu\mathfrak{L}_\mu}$  bleibt jedoch beim Übergang zu  $\nu = \mu$  von gleicher Ordnung, und wegen der in der Grenze infinitesimalen Gleichstromstärke der  $\mu$ -ten und  $\sigma$ -ten Strömung ist der Einfluss der Erweiterung zu vernachlässigen. Es wird davon erst beim Übergang zur Integraldarstellung Gebrauch gemacht. Die Ergebnisse der Umformungen von (22) bis (27) werden der Reihe nach zusammengestellt. Es werden sämtliche Beziehungen (55) bis (64) benötigt.

$$\text{Aus (22) bis (24)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mu \neq \sigma, & \mu = \sigma, \\ A_{\mu,\sigma} = 0, & A_{\mu,\mu} = 0, \\ \Delta i_\mu \Delta i_\sigma \frac{d^2 A_{\mu,\sigma}}{dU_\mu dU_\sigma} = 0, & C = 0, \\ \Delta i_\sigma \frac{dA_{\mu,\sigma}}{dU_\sigma} = 0, & \Delta i_\mu \frac{dA_{\mu,\mu}}{dU_\mu} = 0; \end{array} \right. \quad (66)$$

$$\text{Aus (25) bis (27)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mu \neq \sigma, & \mu = \sigma, \\ 0 = \Delta i_\mu \Delta i_\sigma \frac{d^2 B_{\mu,\sigma}}{dU_\mu dU_\sigma}, & 0 = D, \\ 0 = B_{\mu,\sigma}, & 0 = B_{\mu,\mu}, \\ 0 = \Delta i_\sigma \frac{dB_{\mu,\sigma}}{dU_\sigma}, & 0 = \Delta i_\mu \frac{dB_{\mu,\mu}}{dU_\mu}. \end{array} \right.$$



Sämtliche Gleichungen werden erfüllt, wenn vier Ausdrücke Null sind:

$$0 = A_{\mu, \sigma} = \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[ \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_{\mu}} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_{\sigma}}^* \right] + \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_{\sigma}}^* e^{-j \omega \tau_{\mu}} + \mathfrak{B}_{\sigma \mathfrak{L}_{\mu}}^* e^{j \omega \tau_{\sigma}} \quad (\nu \neq \mu, \sigma), \quad (67)$$

$$0 = B_{\mu, \sigma} = \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[ \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_{\nu}} \mathfrak{B}_{\sigma \mathfrak{L}_{\nu}}^* \right] + \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_{\sigma}} e^{j \omega \tau_{\sigma}} + \mathfrak{B}_{\sigma \mathfrak{L}_{\mu}}^* e^{-j \omega \tau_{\mu}}, \quad (68)$$

$$0 = C = \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[ \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_{\mu}} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_{\mu}}^* \right] + 2 \operatorname{Re} \Delta i_{\mu}^2 \int_0^{s_m} \frac{d}{dU_{\mu}} \mathfrak{E}_{\mathfrak{L}_{\mu}}(s) ds \frac{d}{dU_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}(s)}, \quad (69)$$

$$0 = D = \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[ \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{L}_{\nu}} \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{L}_{\nu}}^* \right] + 2 \operatorname{Re} \Delta i_{\mu}^2 \int_0^{s_m} \frac{d}{dU_{\mu}} \left[ \mathfrak{E}_{\mathfrak{L}_{\mu}}(s) e^{j \omega \tau_{\mu}(s_m)} \right] ds \frac{d e^{-j \omega [\tau_{\mu}(s_m) - \tau_{\mu}(s)]}}{dU_{\mu}}. \quad (70)$$

(67) und (68) sind von nullter Ordnung, (69) und (70) von zweiter Ordnung in der Gleichstromstärke.

Es ist sinnvoll, Strömungsimpedanzen einzuführen. In der  $\mu$ -ten Strömung werde eine  $\mathfrak{L}$ -Modulation vorgenommen. Dann ist am Ende dieser Strömung der Konvektionswechselstrom  $\mathfrak{L}_{\mu} \exp -j \omega \tau_{\mu}$ . Die wechselseitige Strömungsimpedanz  $r_{\sigma, \mu}$  sei das negative Verhältnis der Wechselvoltgeschwindigkeit am Ende der  $\sigma$ -ten Strömung zum Wechselkonvektionsstrom am Ende der  $\mu$ -ten Strömung.

$$r_{\sigma, \mu} = -\mathfrak{B}_{\sigma \mathfrak{L}_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}}. \quad (71)$$

Die Strömungsimpedanz der  $\mu$ -ten Strömung selbst beträgt:

$$r_{\mu, \mu} = -\mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}}. \quad (72)$$

Durch das negative Vorzeichen wird erreicht, dass die Strömungsimpedanzen direkt in die Impedanzen übergehen, mit denen die Anordnung für äussere Anregungen wirkt. Seien  $\mu$  und  $\sigma$  laufzeitlose Strömungen an Klemmenpaaren  $\varrho$  und  $\kappa$ , so wird:

$$r_{\mu, \sigma} = \mathfrak{R}_{\varrho, \kappa}; \quad r_{\mu, \mu} = \mathfrak{R}_{\varrho, \varrho}. \quad (73)$$

$r_{\mu, \sigma}$  und  $r_{\sigma, \mu}$  in (67) und (68) eingeführt, ergibt:

$$\left. \begin{aligned} r_{\mu, \sigma} + r_{\sigma, \mu}^* &= \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[ \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_{\mu}}^* e^{-j \omega \tau_{\mu}} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{L}_{\sigma}} e^{j \omega \tau_{\sigma}} \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[ \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_{\nu}} \mathfrak{B}_{\sigma \mathfrak{L}_{\nu}}^* \right] \end{aligned} \right\} \quad (\nu \neq \mu, \sigma) \quad (74)$$

Für verschwindende Raumladung sind die Summen, da sie den gesamten Gleichstrom der Strömungen enthalten, Null zu setzen. Für zwei bzw. eine Strömung gilt dann:

$$r_{\mu, \sigma} + r_{\sigma, \mu}^* = 0 \quad (75)$$

beziehungsweise

$$r_{\mu, \mu} + r_{\mu, \mu}^* = 0. \quad (76)$$

Angewendet auf zwei bzw. ein Klemmenpaar:

$$\Re_{\mu, \sigma} + \Re_{\sigma, \mu}^* = 0, \quad (77)$$

$$\Re_{\mu, \mu} + \Re_{\mu, \mu}^* = 0. \quad (78)$$

Das sind die bekannten allgemeinen Impedanzbedingungen für eine Anordnung ohne innere Verluste. (69), (70) zusammen mit der entsprechend (79) umgeformten Beziehung (76)

$$r_{\mu, \mu} + r_{\mu, \mu}^* = 2 \operatorname{Re} \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_{\mu}} e^{j\omega\tau_{\mu}} = 2 \operatorname{Re} \int_0^{s_{m\mu}} \mathfrak{E}_{\mathfrak{L}_{\mu}}(s) \cdot d s e^{j\omega\tau_{\mu}(s)} = 0, \quad (79)$$

stellen nichts anderes als die notwendigen Bedingungen für die Verteilung des elektrischen Wechselfeldes, ausgelöst durch eine  $\mathfrak{L}_{\mu}$ -Modulation, längs der  $\mu$ -ten Strömung bei verschwindender Raumladung unter Benutzung der Differentialbeziehungen dar, damit die Wirkleistungsbilanz erfüllt ist.

Für einen einzigen Stromfaden mit einem Geschwindigkeitsspektrum, dessen obere und untere Grenzen der statischen Anfangsvoltgeschwindigkeiten  $U_o$  und  $U_u$  sind, ergibt sich aus (74) durch Anwendung einer partiellen Integration:

$$\left. \begin{aligned} r_{\mu, \sigma} + r_{\sigma, \mu}^* = & \left[ \frac{di_v}{dU_v} \right]_o \mathfrak{B}_{o \mathfrak{L}_{\sigma}} e^{j\omega\tau_{\sigma}} \left[ \mathfrak{B}_{o \mathfrak{L}_{\mu}} e^{j\omega\tau_{\mu}} \right]^* \\ & - \left[ \frac{di_v}{dU_v} \right]_u \mathfrak{B}_{u \mathfrak{L}_{\sigma}} e^{j\omega\tau_{\sigma}} \left[ \mathfrak{B}_{u \mathfrak{L}_{\mu}} e^{j\omega\tau_{\mu}} \right]^* \\ & - \int_{U_u}^{U_o} \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} dU_v \mathfrak{B}_{v \mathfrak{L}_{\sigma}} e^{j\omega\tau_{\sigma}} \left[ \mathfrak{B}_{v \mathfrak{L}_{\mu}} e^{j\omega\tau_{\mu}} \right]^*, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{\mu, \sigma} + r_{\sigma, \mu}^* = & \left[ \frac{di_v}{dU_v} \right]_o \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_o} \mathfrak{B}_{\sigma \mathfrak{L}_o}^* - \left[ \frac{di_v}{dU_v} \right]_u \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_u} \mathfrak{B}_{\sigma \mathfrak{L}_u}^* \\ & - \int_{U_u}^{U_o} \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} dU_v \mathfrak{B}_{v \mathfrak{L}_{\mu}} \mathfrak{B}_{\sigma \mathfrak{L}_v}^*. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Bei einem Stromfaden bedeutet der Index  $v$  nur eine Abhängigkeit von den Anfangsvoltgeschwindigkeiten. Bei mehreren Stromfäden bedeutet Index  $v$  auch eine Abhängigkeit vom Ort des Emissionspunktes, so dass dann eine weitere

Integration oder Summation in (80) und (81) erforderlich ist. Unter einem Stromfaden wird eine Anordnung verstanden, bei der die Felder in einem Querschnitt senkrecht zur Hauptbewegungsrichtung als konstant angesehen werden können. Ein Stromfaden kann deshalb zu einer ebenen Strömung ausarten. Bei endlicher Gesamtgleichstromdichte im Stromfaden richtet sich der Gesamtgleichstrom des Stromfadens nach der zulässigen Querschnittsfläche.

Die weiteren Untersuchungen sollen sich auf das konstante und exponentielle Spektrum erstrecken. Für das konstante Spektrum gilt

$$\frac{di_v}{dU_v} = \frac{di}{dU_e} = \text{const.}$$

Gleichzeitig hat diese Verteilung auch die Eigenschaft, dass der Quotient aus der statischen Ladungsdichte  $dq$  längs des Stromfadens und dem zugehörigen Geschwindigkeitsintervall  $du$  ebenfalls konstant ist:

$$\frac{dq}{du} = \frac{e}{m} \cdot \frac{di}{dU_e}.$$

Ein Stromfaden mit beliebigem Spektrum werde einer reinen Feldmodulation unterworfen. Die  $v$ -te Strömung mit dem Gleichstromanteil  $\Delta i_v$  und den Anfangsvoltgeschwindigkeiten zwischen  $U_v$  und  $U_v + \Delta U_v$  erfährt an einem beliebigen Punkte der Strömung eine Wechselvoltgeschwindigkeit

$$\mathfrak{B}_v(s) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_v(s) + \frac{d\mathfrak{B}_v(s)}{dU_v} \Delta U_v.$$

Der Gleichstrom  $\Delta i_v$  verteilt sich jetzt auf ein Spannungsintervall

$$\Delta U_v \left[ 1 + \frac{d\mathfrak{B}_v(s)}{dU_v} \right].$$

Andrerseits kommt aber nach (50) ein Wechselkonvektionsstrom zum Gleichstromanteil hinzu, so dass für jeden Punkt  $s$  der Strömung der Quotient  $[di_v/dU_v]_s$  unverändert bleibt:

$$\left[ \frac{di_v}{dU_v} \right]_s = \frac{\Delta i_v [1 + d\mathfrak{B}_v(s)/dU_v]}{\Delta U_v [1 + d\mathfrak{B}_v(s)/dU_v]} = \frac{di_v}{dU_v}. \quad (82)$$

Dies gilt für jedes beliebige Spektrum. Speziell beim konstanten Spektrum tritt damit durch die Feldmodulation keine Veränderung der spektralen Verteilung ein. Wird (50) integriert, so ist der gesamte Wechselkonvektionsstrom  $\mathfrak{Q}^{(1)}$  am Ende des Stromfadens mit einem konstanten Spektrum nur durch die Wechselvoltgeschwindigkeiten  $\mathfrak{B}^{(o)}$  und  $\mathfrak{B}^{(u)}$  an der oberen und unteren Geschwindigkeitsgrenze bestimmt.

$$\mathfrak{Q}^{(1)} = \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}^{(o)} - \mathfrak{B}^{(u)}]. \quad (83)$$

Es wird eine wirksame Voltgeschwindigkeit als mittlere Voltgeschwindigkeit der Endmodulationen eingeführt:

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \frac{1}{2} [\mathfrak{B}^{(o)} + \mathfrak{B}^{(u)}]. \quad (84)$$

Analog sei für die Anfangsmodulationen, die durch eine feldmodulierte Vorstrecke entstanden sind, gesetzt:

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_o - \mathfrak{B}_u], \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{1}{2} [\mathfrak{B}_o - \mathfrak{B}_u]. \quad (85)$$

Durch Auflösen nach  $\mathfrak{B}^{(o)}$ ,  $\mathfrak{B}^{(u)}$ ,  $\mathfrak{B}_o$  und  $\mathfrak{B}_u$  ergibt sich:

$$\mathfrak{B}^{(o)} = \mathfrak{B}^{(1)} + \frac{dU_e}{2 di} \mathfrak{Q}^{(1)}; \quad \mathfrak{B}^{(u)} = \mathfrak{B}^{(1)} - \frac{dU_e}{2 di} \mathfrak{Q}^{(1)}; \quad (86)$$

$$\mathfrak{B}_o = \mathfrak{B}_1 + \frac{dU_e}{2 di} \mathfrak{Q}_1; \quad \mathfrak{B}_u = \mathfrak{B}_1 - \frac{dU_e}{2 di} \mathfrak{Q}_1. \quad (87)$$

Mit den Wechselvoltgeschwindigkeiten an den Grenzen des Spektrums sind auch Wechselkonvektionsströme verbunden:

$$\mathfrak{Q}^{(o)} = \frac{1}{2} \mathfrak{Q}^{(1)} + \frac{di}{dU_e} \mathfrak{B}^{(1)}; \quad \mathfrak{Q}^{(u)} = \frac{1}{2} \mathfrak{Q}^{(1)} - \frac{di}{dU_e} \mathfrak{B}^{(1)}; \quad (88)$$

$$\mathfrak{Q}_o = \frac{1}{2} \mathfrak{Q}_1 + \frac{di}{dU_e} \mathfrak{B}_1; \quad \mathfrak{Q}_u = \frac{1}{2} \mathfrak{Q}_1 - \frac{di}{dU_e} \mathfrak{B}_1. \quad (89)$$

Es soll nun untersucht werden, ob mit diesen Ersatzmodulationen der Stromfaden mit konstantem Spektrum in seinem Verhalten auf eine Einzelströmung mit diskreter Geschwindigkeit zurückgeführt werden kann. Zu diesem Zweck wird die Wirkleistungsbilanz mit diesen Ersatzmodulationen geprüft. Entsprechend dem Ausdruck für die Wirkleistung  $N = \text{Re } \mathfrak{B} \mathfrak{Q}^*$  ist die infinitesimale Wirkleistung am Ende der Strömungen durch eine reine Feldmodulation (Index  $\mathfrak{E}$ ) in der Hauptstrecke:

$$dN = \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}} d\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^* + \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^* d\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} d[\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^*] \quad (90)$$

und für das gesamte Spektrum:

$$N' = \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)*} - \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)*}]. \quad (91)$$

Analog ist die zugeführte Wirkleistung am Anfang der Strömungen in der Hauptstrecke:

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_o \mathfrak{B}_o^* - \mathfrak{B}_u \mathfrak{B}_u^*]. \quad (92)$$

Die zusammengesetzten Wechselvoltgeschwindigkeiten an der oberen und unteren Grenze des Spektrums am Ende der Strömungen betragen unter Berücksichtigung



sichtigung der Laufzeiten  $\tau_o$  und  $\tau_u$ :

$$\mathfrak{B}_Z^{(o)} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)} + \mathfrak{B}_o e^{-j\omega\tau_o}; \quad \mathfrak{B}_Z^{(u)} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)} + \mathfrak{B}_u e^{-j\omega\tau_u}. \quad (93)$$

Am Ende der Gesamtströmung wird dann die Wirkleistung:

$$\left. \begin{aligned} N^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_Z^{(o)} \mathfrak{B}_Z^{(o)*} - \mathfrak{B}_Z^{(u)} \mathfrak{B}_Z^{(u)*}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)*} - \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)*}] + \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_o \mathfrak{B}_o^* - \mathfrak{B}_u \mathfrak{B}_u^*] \\ &\quad + \frac{di}{dU_e} \operatorname{Re} [\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)} \mathfrak{B}_o^* e^{j\omega\tau_o} - \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)} \mathfrak{B}_u^* e^{j\omega\tau_u}] \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

abgegeben. Wegen der zusätzlichen Ströme an den Geschwindigkeitsgrenzen durch die Anfangsmodulationen muss das elektrische Wechselfeld noch eine zusätzliche Wirkleistung  $N''$  aufbringen:

$$\left. \begin{aligned} N'' &= \operatorname{Re} \int_0^{sm} \mathfrak{E}(\xi) d\xi \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_o^* e^{j\omega\tau_o(\xi)} - \mathfrak{B}_u^* e^{j\omega\tau_u(\xi)}] \\ &= \frac{di}{dU_e} \operatorname{Re} \left[ \mathfrak{B}_o^* e^{j\omega\tau_o} \int_0^{sm} \mathfrak{E}(\xi) d\xi e^{-j\omega[\tau_o - \tau_o(\xi)]} \right. \\ &\quad \left. - \mathfrak{B}_u^* e^{j\omega\tau_u} \int_0^{sm} \mathfrak{E}(\xi) d\xi e^{-j\omega[\tau_u - \tau_u(\xi)]} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Die beiden Integrale in (95) auf der rechten Seite stellen nichts anderes als  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)}$  bzw.  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)}$  dar. Damit ist  $N''$  gleich dem letzten Glied von (94), und wegen (91), (92), (94) und (95) ist  $N^{(1)} = N' + N_1 + N''$ . Die durch das Wechselfeld der Hauptstrecke zugeführte Wirkleistung  $N' + N''$  ist gleich der Differenz der von den Ladungsträgern abgegebenen und zugeführten Wirkleistung. Eine Wiederholung des Beweises wurde vorgenommen, um die speziellen Ausdrücke beim konstanten Spektrum zu gewinnen. Nunmehr werden die Ersatzmodulationen aus (87) und (86) in (92) und (94) eingeführt:

$$N_1 = \frac{1}{2} [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{L}_1^* + \mathfrak{L}_1 \mathfrak{B}_1^*]; \quad N^{(1)} = \frac{1}{2} [\mathfrak{B}_Z^{(1)} \mathfrak{L}_Z^{(1)*} + \mathfrak{B}_Z^{(1)*} \mathfrak{L}_Z^{(1)}]. \quad (96)$$

Das sind die Wirkleistungen für eine Strömung. Aus (93) erhält man:

$$\mathfrak{L}_Z^{(1)} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{E}}^{(1)} + \mathfrak{L}_1 \frac{1}{2} [e^{-j\omega\tau_o} + e^{-j\omega\tau_u}] + \mathfrak{B}_1 \frac{di}{dU_e} [e^{-j\omega\tau_o} - e^{-j\omega\tau_u}], \quad (97)$$

$$\mathfrak{B}_Z^{(1)} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(1)} + \mathfrak{B}_1 \frac{1}{2} [e^{-j\omega\tau_o} + e^{-j\omega\tau_u}] + \mathfrak{L}_1 \frac{1}{4} \cdot \frac{dU_e}{di} [e^{-j\omega\tau_o} - e^{-j\omega\tau_u}]. \quad (98)$$

Lässt man bei konstantem Gesamtstrom die Breite des Spektrums klein werden

$$\tau_o = \tau - \frac{\Delta\tau}{2}; \quad \tau_u = \tau + \frac{\Delta\tau}{2}; \quad \omega \Delta\tau \ll 1,$$

so entsteht:

$$\mathfrak{Q}_Z^{(1)} = \mathfrak{Q}_\mathfrak{E}^{(1)} + \mathfrak{Q}_1 e^{-j\omega\tau} + \mathfrak{B}_1 i \frac{d\varrho e^{-j\omega\tau}}{dU_e}; \quad \mathfrak{B}_Z^{(1)} = \mathfrak{B}_\mathfrak{E}^{(1)} + \mathfrak{B}_1 e^{-j\omega\tau}. \quad (99)$$

Das sind entsprechend (4) und (6) die Zusammenhänge für eine Strömung. Ist  $\omega \Delta\tau > 1$ , so kann (97) und (98) nicht durch Wahl einer Ersatzlaufzeit und einer geeigneten Abhängigkeit der Laufzeit von der Anfangsvoltgeschwindigkeit unabhängig von den Anfangsmodulationen auf eine Strömung ohne Spektrum zurückgeführt werden. Das gleiche gilt für die wechselseitige Leistung zwischen Feld- und Anfangsmodulationen  $N''$ , die ebenfalls die Laufzeiten enthält. Dagegen werden die durch das Wechselfeld entstehenden Modulationen  $\mathfrak{Q}_\mathfrak{E}^{(1)}$  und  $\mathfrak{B}_\mathfrak{E}^{(1)}$  lineare Funktionen von den Konvektionswechselströmen  $\mathfrak{Q}_o$  und  $\mathfrak{Q}_u$  sein.  $\mathfrak{Q}_o$  und  $\mathfrak{Q}_u$  entstehen durch Verschiebung und Änderung der Breite des Spektrums am Anfang der Strömungen und enthalten nach (89)  $\mathfrak{Q}_1$  und  $\mathfrak{B}_1$ . Insgesamt lassen sich also die Ersatzendmodulationen durch die Ersatzanfangsmodulationen nach (97) und (98) wie folgt darstellen:

$$\mathfrak{Q}_Z^{(1)} = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_1} \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_{\mathfrak{B}_1} \mathfrak{B}_1; \quad \mathfrak{B}_Z^{(1)} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{Q}_1} \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{B}_{\mathfrak{B}_1} \mathfrak{B}_1. \quad (100)$$

In dieser Beziehung besteht kein Unterschied zwischen einer Strömung mit konstantem Spektrum und einer Strömung mit diskreter Geschwindigkeit. Diese linearen Zusammenhänge zwischen den Anfangs- und Endmodulationen bilden mit der Invarianz der am Anfang und Ende der Strömung auftretenden Wirkleistungen, deren Wert durch die Ersatzmodulationen wie bei einer Einzelströmung wiedergegeben wird (96), die Voraussetzungen dafür, dass die Ergebnisse der Matrizendarstellung (20) bis (27), (30) bis (36), (40) bis (43), (45) bis (48) verwendet werden können. Damit können diese Koeffizientenbeziehungen auf Strömungen mit konstanten Spektren bzw. eine Kombination mit Strömungen diskreter Geschwindigkeiten erweitert werden. Der Unterschied zwischen dem Verhalten der beiden Strömungsarten besteht in der verschiedenen Ortsabhängigkeit, die in den Koeffizienten selbst nicht direkt erscheint.

Es werden die Umformungen angegeben, die für eine gesteuerte Modulation  $\mathfrak{V}$  bezüglich ihrer Abhängigkeit von den an den Grenzen des Spektrums tatsächlich auftretenden steuernden Wechselkonvektionsströmen  $\mathfrak{Q}_o$  und  $\mathfrak{Q}_u$  bzw. ihren Ersatzmodulationen bestehen.

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_o} \mathfrak{Q}_o + \mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_u} \mathfrak{Q}_u = \mathfrak{Q}_1 \frac{1}{2} [\mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_o} + \mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_u}] + \mathfrak{B}_1 \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_o} - \mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_u}]. \quad (101)$$

$\mathfrak{Q}_o$  und  $\mathfrak{Q}_u$  sind aus (89) durch  $\mathfrak{Q}_1$  und  $\mathfrak{B}_1$  ersetzt worden. Die auf die Ersatzmodulationen bezogenen Koeffizienten lauten:

$$\mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_1} = \frac{1}{2} [\mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_o} + \mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_u}]; \quad \mathfrak{V}_{\mathfrak{B}_1} = \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_o} - \mathfrak{V}_{\mathfrak{Q}_u}] \quad (102)$$

oder

$$\mathfrak{Y}_{\mathfrak{Q}_0} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{Q}_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dU_e}{di} \mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}_1}; \quad \mathfrak{Y}_{\mathfrak{Q}_u} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{Q}_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{dU_e}{di} \mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}_1}. \quad (103)$$

Geht die Breite des Spektrums bei unverändertem Gesamtstrom gegen Null, so wird  $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{Q}_0} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{Q}_u} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{Q}_1}$ , das heisst, die Wirkung einer  $\mathfrak{Q}$ -Modulation unmittelbar rechts und links des auf eine Geschwindigkeit zusammengezogenen Spektrums ist die gleiche. Unter Benutzung von (86) und (103) in (80) und (81) (die Integrale entfallen wegen  $d^2 i_v / dU_v^2 = 0$ ) ergibt sich:

$$r_{\mu, \sigma} + r_{\sigma, \mu}^* = \mathfrak{L}_{1\mathfrak{Q}_\sigma} e^{j\omega\tau_\sigma} [\mathfrak{B}_{1\mathfrak{Q}_\mu} e^{j\omega\tau_\mu}]^* + \mathfrak{B}_{1\mathfrak{Q}_\sigma} e^{j\omega\tau_\sigma} [\mathfrak{L}_{1\mathfrak{Q}_\mu} e^{j\omega\tau_\mu}]^* \quad (104)$$

$$r_{\mu, \sigma} + r_{\sigma, \mu}^* = \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_1}^* \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{Q}_1}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_1} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{Q}_1}^*. \quad (105)$$

Auf Klemmenpaare 1 und 2 angewendet ( $\tau_\mu = \tau_\sigma = 0$ ,  $\mathfrak{Q}_\mu = -\mathfrak{J}_1$ ,  $\mathfrak{Q}_\sigma = -\mathfrak{J}_2$ ,  $\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{U}_1$ ,  $\mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{U}_2$ ) folgt:

$$\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = \mathfrak{L}_{1\mathfrak{J}_2} \mathfrak{B}_{1\mathfrak{J}_1}^* + \mathfrak{B}_{1\mathfrak{J}_2} \mathfrak{L}_{1\mathfrak{J}_1}^* = \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_1} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{Q}_1}^* + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_1} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{Q}_1}^* \quad (106)$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (34) und (30) für eine Strömung. Umgekehrt stellen (104) und (105) Beziehungen für die Strömungsimpedanzen bei einer Strömung mit diskreter Geschwindigkeit dar.

Für das exponentielle Spektrum nimmt  $di_v/dU_v$  und seine erste Ableitung die folgenden Werte an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_v}{dU_v} &= \frac{e}{kT} e^{-\frac{eU_v}{kT}}; \quad c_o = \left[ \frac{di_v}{dU_v} \right]_o = 0; \quad c_u = \left[ \frac{di_v}{dU_v} \right]_u = \frac{e}{kT}; \\ \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} &= -\frac{e}{kT} \cdot \frac{di_v}{dU_v}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

$T$  Temperatur des Emissionsgebietes des Stromfadens mit dem Gesamtgleichstrom  $i$ . Die wechselseitigen Strömungsimpedanzen aus (80) und (81), der Strömungswirkwiderstand  $r_{\mu, \mu}$  [wird aus (108) und (109) erhalten für  $\sigma = \mu$ ], und die Beziehungen (69) und (70) ergeben sich damit, wenn in allen Gleichungen mit  $2kT$  multipliziert und eine Umstellung vorgenommen wird, zu:

$$\int_{U_u=0}^{U_o=\infty} 2e di_v \mathfrak{B}_{v\mathfrak{Q}_\sigma} \mathfrak{B}_{v\mathfrak{Q}_\mu}^* = 2e i \mathfrak{B}_{u\mathfrak{Q}_\sigma} \mathfrak{B}_{u\mathfrak{Q}_\mu}^* + 2kT [r_{\mu, \sigma} + r_{\sigma, \mu}^*] e^{j\omega[\tau_\mu - \tau_\sigma]}, \quad (108)$$

$$\int_0^\infty 2e di_v \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_v} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{Q}_v}^* = 2e i \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_u} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{Q}_u}^* + 2kT [r_{\mu, \sigma} + r_{\sigma, \mu}^*], \quad (109)$$

$$\int_0^\infty 2e di_v \mathfrak{B}_{v\mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{B}_{v\mathfrak{Q}_\mu}^* = 2e i \mathfrak{B}_{u\mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{B}_{u\mathfrak{Q}_\mu}^* + 4kT r_{\mu, \mu}, \quad (110)$$

$$\int_0^{\infty} 2 e di_v \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{Q}_v} \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{Q}_v}^* = 2 e i \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{Q}_u} \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{Q}_u}^* + 4 k T r_{\mu, \mu}, \quad (111)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} 2 e di_v \mathfrak{B}_{v \mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{B}_{v \mathfrak{Q}_\mu}^* &= 2 e i \mathfrak{B}_{u \mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{B}_{u \mathfrak{Q}_\mu}^* - 4 k T \operatorname{Re} \Delta i_\mu^2 \\ &\times \int_0^{s_m} \frac{d}{dU_\mu} \mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\mu}(\bar{s}) d\bar{s} \frac{de^{i\omega\tau_\mu(\bar{s})}}{dU_\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} 2 e di_v \mathfrak{Q}_{\mu \mathfrak{Q}_v} \mathfrak{Q}_{\mu \mathfrak{Q}_v}^* &= 2 e i \mathfrak{Q}_{\mu \mathfrak{Q}_u} \mathfrak{Q}_{\mu \mathfrak{Q}_u}^* - 4 k T \operatorname{Re} \Delta i_\mu^2 \\ &\times \int_0^{s_m} \frac{p}{dU_\mu} [\mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\mu}(\bar{s}) e^{i\omega\tau_\mu(s_m)}] d\bar{s} \frac{de^{-i\omega[\tau_\mu(s_m) - \tau_\mu(\bar{s})]}}{dU_\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Die ersten vier Gleichungen sind von nullter Ordnung, die beiden letzten sind in allen ihren Gliedern von zweiter Ordnung in  $\Delta i_\mu$ , da die Koeffizienten  $\mathfrak{B}_{v \mathfrak{Q}_\mu}$  und  $\mathfrak{Q}_{\mu \mathfrak{Q}_v}$  von erster Ordnung in  $\Delta i_\mu$  sind [(59), (58)].  $2 e di_v$  ist das infinitesimale Schwankungsquadrat<sup>1)</sup> pro Hertz Bandbreite  $\mathfrak{Q}_v$   $\mathfrak{Q}_v^*$  der  $v$ -ten Strömung mit der infinitesimalen Gleichstromstärke  $di_v$  an der Emissionsstelle.  $2 e i$  ist das Schwankungsquadrat des Emissionsstromes des gesamten Stromfadens. (108) bis (113) ergeben somit zwanglos Beziehungen, die auf Rauschvorgänge in linear sich verhaltenden Anordnungen bezogen werden können. Die linke Seite von (111) stellt das Schwankungsquadrat der Voltgeschwindigkeit der Ladungsträger am Ende der  $\mu$ -ten Strömung dar. Es setzt sich zusammen aus einem Schwankungsquadrat der Voltgeschwindigkeit am Ende der  $\mu$ -ten Strömung, das entsteht, wenn der gesamte Schwankungsstrom in der Strömung mit der niedrigsten Geschwindigkeit ( $U_u = 0$ ) wirkt und einem Schwankungsquadrat einer Spannung, das man erhält, wenn man dem Strömungswirkwiderstand  $r_{\mu, \mu}$  entsprechend der Rauschformel von NYQUIST<sup>2)</sup> eine Rauschtemperatur  $T$  zuordnet. Bezieht sich  $\mu$  auf ein Klemmenpaar 1 ( $\mathfrak{B}_\mu, r_{\mu, \mu}$  gehen über in  $\mathfrak{U}_1, R_{11}$ ), so entsteht aus (111):

$$\int_0^{\infty} 2 e di_v \mathfrak{U}_{1 \mathfrak{Q}_v} \mathfrak{U}_{1 \mathfrak{Q}_v}^* = 2 e i \mathfrak{U}_{1 \mathfrak{Q}_u} \mathfrak{U}_{1 \mathfrak{Q}_u}^* + 4 k T R_{11}. \quad (114)$$

Beim Übergang vom Widerstandersatzbild zum Leitwertersatzbild tritt für

<sup>1)</sup> Alle vorkommenden Schwankungs- oder Rauschquadrate oder -produkte beziehen sich stets auf 1 Hertz Bandbreite.

<sup>2)</sup> H. NYQUIST, Phys. Rev. 32, 110 (1928).



$\mathcal{U}_1$  und  $R_{11}$ ,  $\mathfrak{I}_1$  und  $S_{11}$ :

$$\int_0^\infty 2 e di_v \mathfrak{I}_{1v} \mathfrak{I}_{1v}^* = 2 e i \mathfrak{I}_{1u} \mathfrak{I}_{1u}^* + 4 k T S_{11}. \quad (115)$$

Die Zerlegung in zwei Rauschanteile ist von FREEMAN<sup>1)</sup> für ebene Strömungen bei verschwindender Raumladung berechnet worden. Sie kann hier auf den Fall mit Raumladung im elektromagnetischen Feld und für die Randwerte der Strömungen selbst erweitert werden. Im Abschnitt II über anfangsgesteuerte Strömungen wird gezeigt, welche Beziehungen bei Anwesenheit eines Potentialminimums bestehen. Die Schwankungsströme in verschiedenen Strömungen einer emittierenden Oberfläche stehen in keinem phasenmässigen Zusammenhang<sup>2)</sup>. Dagegen besteht eine phasenmässige Zuordnung bei den durch die Emissionsschwankungen ausgelösten Schwankungen. Für die Schwankungen der Voltgeschwindigkeiten an den Enden der Strömungen regelt dies (109) und für die Schwankungen der Kurzschlußströme an zwei Klemmenpaaren 1 und 2 (116) [in (109) wird  $\mathfrak{B}_\mu$ ,  $\mathfrak{B}_\sigma$ ,  $r_{\mu,\sigma}$ ,  $r_{\sigma,\mu}$  ersetzt durch  $\mathfrak{I}_1$ ,  $\mathfrak{I}_2$ ,  $\mathfrak{S}_{12}$ ,  $\mathfrak{S}_{21}$ ]:

$$\int_0^\infty 2 e di_v \mathfrak{I}_{1v} \mathfrak{I}_{2v}^* = 2 e i \mathfrak{I}_{1u} \mathfrak{I}_{2u}^* + 2 k T [\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}]. \quad (116)$$

Die Integrale in (109) und (116) sind bestimmend für den wechselseitigen Einfluss bei der Bildung wirksamer Schwankungsquadrate. Sind die Integrale in (109) und (116) Null, so kann gerechnet werden, als ob die Schwankungsquadrate an  $\mu$  oder 1 bzw.  $\sigma$  oder 2 unabhängig voneinander sind.

Die linke Seite von (113) stellt das induzierte Schwankungsquadrat des Konvektionsstromes am Ende der  $\mu$ -ten Strömung dar, das proportional  $\Delta i_\mu^2$  ist. Da das Schwankungsstromquadrat der  $\mu$ -ten Strömung proportional der Gleichstromstärke  $\Delta i_\mu$  ist, so tritt das induzierte gegenüber dem direkten Schwankungsstromquadrat in jeder Strömung bei verschwindendem  $\Delta i_\mu$  zurück. An Klemmenpaaren liefert (113) und (112) keinen Beitrag. Die Glieder mit  $T$  werden Null wegen  $\tau_\mu = 0$ , und jeder einzelne Koeffizient wird in den anderen Gliedern Null.

Aus (108) und (109) sowie (110) und (111) erhält man die Vertauschungsrelationen durch Subtraktion, wobei die Koeffizienten durch die Strömungsimpedanzen ersetzt werden.

$$\int_0^\infty 2 e di_v r_{\mu,v} r_{\sigma,v}^* - 2 e i r_{\mu,u} r_{\sigma,u}^* = \int_0^\infty 2 e di_v r_{v,\sigma} r_{v,\mu}^* - 2 e i r_{u,\sigma} r_{u,\mu}^*, \quad (117)$$

<sup>1)</sup> J. J. FREEMAN, J. appl. Phys. 23, 1223 (1952).

<sup>2)</sup> W. SCHOTTKY, Ann. Phys. 57, 541 (1918).

$$\int_0^\infty 2e di_v r_{\mu, v} r_{\mu, v}^* - 2e i r_{\mu, u} r_{\mu, u}^* = \int_0^\infty 2e di_v r_{v, \mu} r_{v, \mu}^* - 2e i r_{u, \mu} r_{u, \mu}^*, \quad (118)$$

und für  $\mu = u$ :

$$\int_0^\infty 2e di_v r_{u, v} r_{u, v}^* = \int_0^\infty 2e di_v r_{v, u} r_{v, u}^*. \quad (119)$$

Die linken Seiten gehen aus den rechten Seiten durch Vertauschung von  $v$  mit  $\mu$ ,  $v$  mit  $\sigma$ ,  $u$  mit  $\mu$  und  $u$  mit  $\sigma$  sowie Bildung des konjugiert komplexen Wertes in (117) hervor.

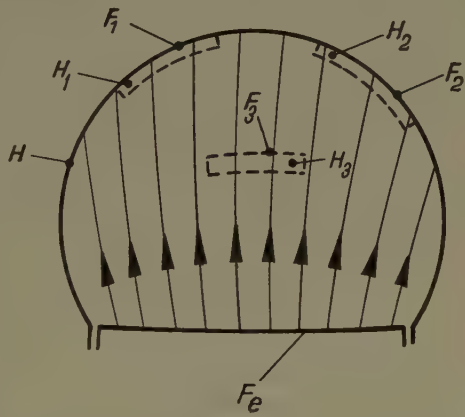
Wird von einem Stromfaden auf ein Emissionsgebiet  $F_e$  übergegangen, so bedeutet Index  $v$  in den Ausgangsgleichungen, zum Beispiel (81), sowohl eine Abhängigkeit von  $U_e$  als auch von  $x, y$ , dem Ort des Emissionspunktes. Wird in (107) die Stromdichte  $i(x, y, U_e)$  eingeführt, so folgt aus (81), wenn mit 2 multipliziert und umgestellt wird, wobei auf das Leitwertersatzbild an zwei Klemmenpaaren durch Austausch von  $\mathfrak{B}_\mu$  und  $\mathfrak{B}_\sigma$  gegen die Kurzschlußströme  $\mathfrak{I}_1$  und  $\mathfrak{I}_2$  bezogen wird:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{U_e=0}^{F_e} \int_{U_e=0}^{U_e=\infty} \frac{2e di(x, y, U_e)}{k T(x, y)} dF_e \mathfrak{I}_{1y}(x, y, U_e) \mathfrak{I}_{2y}^*(x, y, U_e) \\ & = \int_{F_e} \frac{2e i(x, y)}{k T(x, y)} dF_e \mathfrak{I}_{1g}(x, y, 0) \mathfrak{I}_{2y}^*(x, y, 0) + 2 [\mathfrak{I}_{12} + \mathfrak{I}_{21}^*]. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Hieraus folgt, dass die durch die Emissionsschwankungen entstehenden Schwankungsprodukte und -quadrate der Kurzschlußströme an den Klemmenpaaren nur dann durch (120) dargestellt werden können, wenn die Temperatur der emittierenden Oberfläche  $T(x, y)$  konstant ist.

In Figur 2 ist ein verlustloser elektromagnetischer Hohlraum  $H$  angegeben, der eine Elektronenströmung mit der emittierenden Fläche  $F_e$  und einer einheitlichen Emissionstemperatur einschliesst. Drei weitere Hohlräume, zwei an der Begrenzung von  $H$  und einer innerhalb des Raumes, sind angeordnet. Die Elektronen sollen ungehindert hindurchgehen können, und die Laufzeiten der Elektronen innerhalb dieser drei Hohlräume sollen verschwindend sein. Wenn die Elektronen durch  $H_1$  und  $H_2$  nur in einer Richtung entweder von aussen nach innen oder umgekehrt gehen, ist der Wirkleitwert für eine Anregung innerhalb von  $H_1$  und  $H_2$  Null. Die wechselseitigen Leitwerte zwischen  $H_1$  und  $H_2$  sind Null, wenn die Elektronen durch  $H_1$  und  $H_2$  in der gleichen Richtung, bezogen auf die gleiche Flächennormale, gehen. Für  $H_3$  sind die Leitwerte im allgemeinen nicht Null. Die bei einer inneren Anregung von  $H_3$  geschwindigkeitsmoduliert hindurchgegangenen Elektronen ergeben eine Rückwirkung auf

die neu eintretenden Elektronen. Ebenso sind die wechselseitigen Leitwerte  $\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}^*$  von  $H_3$  mit  $H_1$  oder  $H_2$  aus dem gleichen Grund im allgemeinen nicht Null. In den Fällen, in denen die Leitwerte Null sind, fällt in (120) das Glied 2 ( $\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}^*$ ) weg. Die Gleichung (120) besagt dann, dass die durch die Emissionsschwankungen an den inneren schmalen Rändern von  $H_1$  und  $H_2$  induzierten wechselseitigen Schwankungsprodukte und -quadrate der Kurzschlußströme genau so gross sind, wie wenn in jedem Stromfaden die Schwankungsströme der einzelnen Strömungen dieses Stromfadens zusammengefasst am Anfang der langsamsten Strömung wirken würden. Lässt man die seitlichen Abmessungen von  $H_1$  und  $H_2$  gegen Null gehen, so werden die Kurzschlussströme genau so gross wie die auf den Querschnitt von  $H_1$  und  $H_2$  auftreffenden Konvektionsströme. Vergrössert man die seitlichen Abmessungen von  $H_1$  und  $H_2$ , so dass sie nicht mehr als klein gegenüber der Vakuumwellenlänge der hochfrequenten Vorgänge sind, so besteht ein Unterschied zwischen Kurzschlußströmen und Konvektionsströmen, da bei normalen Mediumkonstanten Transformationen in  $H_1$  und  $H_2$  auftreten. Besitzen  $H_1$  und  $H_2$  ein Medium mit der besonderen Eigenschaft einer Permeabilität Null, so treten keine linearen Transformationsverzerrungen auf, und die Kurzschlußströme werden auch bei endlicher Fläche mit den Konvektionsströmen identisch. Werden die Hohlräume  $H_1$  und  $H_2$  entfernt und Flächen  $F_1$  und  $F_2$  auf der inneren Oberfläche von  $H$  gewählt, so kann in (120)  $\mathfrak{J}_1$  bzw.  $\mathfrak{J}_2$  durch die auftreffenden Konvektionswechselströme  $\mathfrak{Q}_1$  bzw.  $\mathfrak{Q}_2$  an  $F_1$  bzw.  $F_2$  ersetzt werden, wobei die Leitwerte Null gesetzt werden können. Für die wechselseitigen Schwankungsprodukte der auftreffenden Konvektionsströme an  $F_1$  und  $F_2$  gilt dann:



Figur 2  
Elektromagnetischer Hohlraum  $H$  mit emittierender Fläche  $F_e$  und drei weiteren Hohlräumen  $H_1, H_2, H_3$  mit den Grundflächen  $F_1, F_2, F_3$ .

$$\left. \begin{aligned} & \int_{U_e=0}^{F_e} \int_{U_e=-\infty}^{U_e=+\infty} 2 e \, d i(x, y, U_e) \, d F_e \, \mathfrak{Q}_{1\mathfrak{Q}}(x, y, U_e) \, \mathfrak{Q}_{2\mathfrak{Q}}^*(x, y, U_e) \\ & = \int_{F_e}^{F_e} 2 e \, i(x, y) \, d F_e \, \mathfrak{Q}_{1\mathfrak{Q}}(x, y, 0) \, \mathfrak{Q}_{2\mathfrak{Q}}^*(x, y, 0) . \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Das Schwankungsquadrat der Konvektionsströme an  $F_1$  beträgt:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{U_e=0}^{F_e} \int_{U_e=0}^{U_e=\infty} 2 e \, di(x, y, U_e) \, dF_e \, \mathfrak{L}_{1\Omega}(x, y, U_e) \, \mathfrak{L}_{1\Omega}^*(x, y, U_e) \\ & = \int_{F_e}^{F_e} 2 e \, i(x, y) \, dF_e \, \mathfrak{L}_{1\Omega}(x, y, 0) \, \mathfrak{L}_{1\Omega}^*(x, y, 0) . \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Bei senkrechter Richtung des magnetischen Führungsfeldes zur emittierenden Oberfläche liefert die normale Glühemission zwanglos ein Exponentialspektrum. Bei schiefer Richtung wird der Sättigungsstrom auf  $\cos \varphi$  ( $\varphi$  = Winkel zwischen Flächennormale und Magnetfeld) geschwächt. Es ergibt sich das gleiche Spektrum, wenn angenommen wird, dass der Bruchteil  $1 - \cos \varphi$  der Elektronen, die wieder auf die Kathode zurückfallen, keine Vorzugsrichtung der Emission bewirkt. Man bezieht zweckmässigerweise das Verteilungsgesetz auf die Richtung des magnetischen Führungsfeldes. Dabei findet man ebenfalls ein exponentielles Verteilungsgesetz von der Form

$$di = i \, dF \, p_{0\perp} \, dp_{0\perp} \exp \left[ \frac{-W}{k T} \right] \frac{e \, dU_e \cos \varphi}{(m_0 + k T/c_0^2) (k T)^2},$$

wobei die Emissionsenergie  $W = e U_e + W_0$  ist. ( $W_0$  Emissionsenergie, wenn nur eine Bewegungsgrösse  $p_{0\perp}$  quer zum Führungsfeld besteht.)

Für eine Strömung mit diskreter Geschwindigkeit werden noch die Vereinfachungen angegeben, die bei verschwindender Raumladung bestehen. Wird bei den Ausdrücken für das Leitwertersatzbild (40) und (41) die Differentialbeziehung (54) benutzt, so ergibt sich für die wechselseitigen Leitwerte und den Wirkleitwert an zwei bzw. einem Klemmenpaar:

$$\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}^* = 4i \frac{d}{dU_e} [\mathfrak{I}_{1\Omega} \mathfrak{I}_{2\Omega}^*]; \quad 2 S_{11} = 4i \frac{d}{dU_e} [\mathfrak{I}_{1\Omega} \mathfrak{I}_{1\Omega}^*]. \quad (123)$$

Der Koeffizient  $\mathfrak{B}_{11}$  aus (43) folgt mit (56) zu:

$$\mathfrak{B}_{11} = \mathfrak{I}_{1\Omega}^* e^{-j \omega \tau}. \quad (124)$$

Bei den Untersuchungen in diesem Abschnitt I stehen die Anfangsmodulationen in keinem gegenseitigen Zusammenhang. Im folgenden Abschnitt II werden Vorgänge behandelt, bei denen die Anfangsmodulationen teilweise oder vollständig abhängig sind von den Endmodulationen anderer Strömungen. Dies hat Bedeutung bei dem wichtigen Fall des Vorhandenseins von Potentialminima in den Strömungen.



# Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus

Von HEINZ RUTISHAUSER, Zürich<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Im Anschluss an eine praktische Anwendung des BO-Algorithmus (Biorthogonalisierungs-Algorithmus von C. LANCZOS [4], [5]<sup>2)</sup> machte mich Herr Prof. E. STIEFEL, ETH., auf das Problem aufmerksam, die höheren Eigenwerte direkt aus den sogenannten Schwarzschen Konstanten zu bestimmen, das heisst ohne den Umweg über die Orthogonalisierung. Auf diese Anregung hin entwickelte der Verfasser einen Algorithmus, der die gestellte Aufgabe löst.

Allerdings gab bereits A. C. AITKEN [1] eine Methode an, welche hauptsächlich zur Auflösung algebraischer Gleichungen gedacht war, aber auch die Bestimmung höherer Eigenwerte aus Schwarzschen Konstanten gestattet. Ferner stammt von C. LANCZOS ein Algorithmus<sup>3)</sup> zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms einer Matrix aus Schwarzschen Konstanten. Überdies entwickelte J. HADAMARD in seiner Dissertation [2] eine Methode zur Bestimmung der Pole einer durch ihre Potenzreihe gegebenen Funktion. Er hat damit, wie § 2 zeigen wird, auch das eingangs erwähnte Eigenwertproblem gelöst. Wenn hier das schon gelöste Problem nochmals aufgegriffen wird, so geschieht dies deshalb, weil der entwickelte Algorithmus eine Reihe von weiteren Anwendungen gestattet und insbesondere auch wertvolle Beziehungen zur Kettenbruchtheorie vermittelt<sup>4)</sup>.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den theoretischen Grundlagen, während über die zahlreichen Anwendungen (Auflösung algebraischer Gleichungen, Eigenwertprobleme, Umwandlung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch und umgekehrt, Summation schlecht konvergenter Reihen usw.) später berichtet werden soll.

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass an der GaMM.-Tagung 1953 (21. bis 24. April in Aachen) auszugsweise über diese Arbeit berichtet wurde [7].

## 2. Problemstellung

Sei  $A$  eine  $n$ -reihige Matrix,  $A^*$  ihre Transponierte, ferner seien  $x_0, y_0$  zwei Vektoren, von denen  $x_0$  in bezug auf die Matrix  $A$  und  $y_0$  in bezug auf die

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 251.

<sup>3)</sup> Es handelt sich *nicht* um den BO-Algorithmus, vgl. vielmehr Kapitel VI bei [4] oder S. 173—179 bei [5].

<sup>4)</sup> Herrn Prof. Stiefel verdanke ich auch die Anregung zur Vereinfachung einiger Beweise mit Hilfe der Kettenbruchtheorie.

Matrix  $A^*$  in allgemeiner Lage sei, das heisst, im Koordinatensystem der Eigen- und Hauptvektoren von  $A$  (bzw.  $A^*$ ) verschwinde keine Komponente von  $x_0$  (bzw.  $y_0$ ). Ich bilde nun aus  $x_0$  und  $y_0$  die unendlich vielen Vektoren  $x_\nu = A^\nu x_0$  und  $y_\nu = (A^*)^\nu y_0$  sowie die inneren Produkte  $s_{\mu+\nu} = (x_\mu, y_\nu)$ , die bekanntlich nur von der Summe der Indizes  $\mu, \nu$  abhängen und als *Schwarzsche Konstanten* der Matrix  $A$  in bezug auf die Anfangsvektoren  $x_0$  und  $y_0$  bezeichnet werden.

Die mit diesen Schwarzschen Konstanten  $s_\kappa$  gebildete Funktion

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_\kappa}{z^{\kappa+1}} \quad (1)$$

ist nun rational, und ihre Pole sind die Eigenwerte von  $A$ , denn es ist

$$f(z) = (B x_0, y_0) \quad \text{mit} \quad B = (z E - A)^{-1}.$$

Damit ist das gestellte Problem, nämlich die Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix  $A$  aus Schwarzschen Konstanten, zurückgeführt auf die Bestimmung der Pole einer rationalen Funktion

$$f(s) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \dots$$

Ist jedoch  $A$  eine unendliche Matrix oder ein Integraloperator, so ist die Funktion  $f(z)$  zwar nicht mehr rational, aber ihre Pole sind immer noch Eigenwerte von  $A$ . In gewissen Fällen kann man beweisen, dass  $f(z)$  für  $z \neq 0$  meromorph ist, beispielsweise dann, wenn die Schwarzschen Konstanten einem selbstadjungierten und volldefiniten Eigenwertproblem entstammen, für welches der Entwicklungssatz gilt.

Die dargelegten Gründe rechtfertigen es wohl ohne weiteres, nicht das Problem der Eigenwertbestimmung, sondern wie J. HADAMARD [2] das etwas allgemeinere Problem der Bestimmung der Pole einer durch eine Reihe (1) gegebenen Funktion  $f(z)$  zu behandeln, wobei die  $s_\kappa$  beliebig komplex sein dürfen. Darüber hinaus wird in gewissen Fällen auch noch die Partialbruchzerlegung der Funktion  $f(z)$  gesucht sein, falls eine solche existiert.

### 3. Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus (QD-Algorithmus)

Für den Fall, dass die erzeugende Funktion

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_\kappa}{z^{\kappa+1}}$$

ausserhalb eines gewissen Kreises  $|z| = R$  genau einen einfachen Pol  $\lambda_1$  besitzt, gab bereits D. BERNOULLI die Formel

$$\lambda_1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{s_{\nu+1}}{s_\nu} \quad (2a)$$

an. Zur Bestimmung weiterer Pole dienen die Formeln (21) bei AITKEN [1]; beispielsweise erhält man unter der Voraussetzung  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$  für den Pol  $\lambda_2$  die Beziehung

$$\lambda_2 = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\frac{\left| \begin{smallmatrix} s_{v+1} & s_{v+2} \\ s_{v+2} & s_{v+3} \end{smallmatrix} \right|}{s_{v+1}}}{\frac{\left| \begin{smallmatrix} s_v & s_{v+1} \\ s_{v+1} & s_{v+2} \end{smallmatrix} \right|}{s_v}}, \quad (2b)$$

und entsprechende Formeln können für die weiteren Pole aufgestellt werden. Nun gilt aber die Identität

$$\frac{\left| \begin{smallmatrix} s_v & s_{v+1} \\ s_{v+1} & s_{v+2} \end{smallmatrix} \right|}{s_v} = s_{v+1} \left( \frac{s_{v+2}}{s_{v+1}} - \frac{s_{v+1}}{s_v} \right),$$

der wir entnehmen, dass man  $\lambda_2$  auch durch folgenden Prozess aus den Schwarzschen Konstanten  $s_v = s_1^{(v)}$  ermitteln kann: Man bildet die Quotienten  $q_1^{(v)} = s_1^{(v+1)}/s_1^{(v)}$ , dann die Differenzen dieser  $d_1^{(v)}: d_1^{(v)} = q_1^{(v+1)} - q_1^{(v)}$ , und schliesslich die Produkte

$$s_2^{(v)} = s_1^{(v+1)} d_1^{(v)} \quad \left( = \frac{1}{s_v} \left| \begin{smallmatrix} s_v & s_{v+1} \\ s_{v+1} & s_{v+2} \end{smallmatrix} \right| \right).$$

Dann ist  $\lambda_2$  nach (2b) der Grenzwert der Quotienten  $q_2^{(v)} = s_2^{(v+1)}/s_2^{(v)}$  (für  $v \rightarrow \infty$ ), genau so wie  $\lambda_1$  nach (2a) der Grenzwert von  $q_1^{(v)}$  ist.

Für die praktische Rechnung wird man die Zahlen  $s_1^{(v)}$ ,  $q_1^{(v)}$ , ... untereinander schreiben (vgl. das Beispiel auf Seite 236); man spricht dann von einer « Quotientenkolonne »  $q_1^{(v)}$  bzw. von einer « Differenzenkolonne » usw.

Man wird nun vermuten, dass sich durch konsequente Fortsetzung dieses Prozesses auch die weiteren Pole  $\lambda_3, \lambda_4, \dots$  als Grenzwerte entsprechender Quotienten  $q_3^{(v)}, q_4^{(v)}, \dots$  ergeben (vorausgesetzt, dass  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > |\lambda_4| > \dots$ ).

Dies ist in der Tat der Fall, nur muss man die weiteren Differenzenkolonnen  $d_\sigma^{(v)}$  ( $\sigma = 2, 3, \dots$ ) vor der Multiplikation mit  $s_\sigma^{(v+1)}$  modifizieren; es ergibt sich dann die folgende allgemeine Vorschrift zur Aufstellung des *QD-Schemas* zu den gegebenen Reihenkoeffizienten (bzw. Schwarzschen Konstanten)  $s_v = s_1^{(v)}$ :

Ausgehend von den  $s_1^{(v)}$  berechne man nacheinander (für  $\sigma = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\left. \begin{aligned} q_\sigma^{(v)} &= s_\sigma^{(v+1)}/s_\sigma^{(v)} && \text{Quotientenreihe der } s_\sigma^{(v)}, \\ d_\sigma^{(v)} &= q_\sigma^{(v+1)} - q_\sigma^{(v)} && \text{Differenzenreihe der } q_\sigma^{(v)}, \\ e_\sigma^{(v)} &= d_\sigma^{(v)} + e_{\sigma-1}^{(v+1)} && \text{modifizierte Differenzen}^2), \\ s_{\sigma+1}^{(v)} &= s_\sigma^{(v+1)} \cdot e_\sigma^{(v)} && \text{neue s-Reihe.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

1) Wir bezeichnen die Schwarzschen Konstanten  $s_v$  fortan auch gelegentlich mit  $s_1^{(v)}$ .

2) Für  $\sigma = 1$  stimmen die  $e_1^{(v)}$  mit den  $d_1^{(v)}$  überein, also ist immer  $e_0^{(v)} = 0$  zu setzen.

Falls man die  $s_{\sigma}^{(v)}$ -Werte ( $\sigma > 1$ ) nicht benötigt, kann man auch mit der folgenden komprimierten Vorschrift arbeiten (ausgehend von  $e_0^{(v)} = 0$  und  $q_1^{(v)} = s_{v+1}/s_v$ ):

$$\left. \begin{aligned} e_{\sigma}^{(v)} &= e_{\sigma-1}^{(v+1)} + q_{\sigma}^{(v+1)} - q_{\sigma}^{(v)}, \\ q_{\sigma+1}^{(v)} &= q_{\sigma}^{(v+1)} \cdot \frac{e_{\sigma}^{(v+1)}}{e_{\sigma}^{(v)}}. \end{aligned} \right\} \quad (\sigma = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

### Beispiel zum QD-Algorithmus

Die  $s_1^{(v)}$  seien die sogenannten Fibonaccischen Zahlen; es ist dann

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}:$$

$s_1^{(v)}$	$q_1^{(v)}$	$d_1^{(v)} = e_1^{(v)}$	$s_2^{(v)}$	$q_2^{(v)}$	$d_2^{(v)}$	$e_2^{(v)}$	$s_3^{(v)}$
1	1						
1	2	.1	1	-1			
2	1,5	-0,5	-1	-0,5	+0,5	0	0
3	1,666 667	0,166 667	0,5	-0,666 667	-0,166 667	0	0
5	1,6	-0,066 667	-0,333 333	-0,6	+0,066 667	0	0
8	1,625	+0,025	+0,2	-0,625	-0,025	0	0
13	1,615 384	-0,009 615	-0,125				
21	$\lambda \approx 1,618 034$			$\lambda_2 \approx -0,618 034$			

An diesem einfachen Beispiel tritt bereits eine Erscheinung zutage, die sich als allgemeingültig erweisen wird:

Wenn  $f(z)$  eine rationale Funktion ist, deren Nenner den Grad  $n$  besitzt, so bricht das QD-Schema nach der  $n$ -ten modifizierten Differenzenkolonne ab, ganz ähnlich, wie das gewöhnliche Differenzenschema eines Polynoms nach der  $n$ -ten Differenz abbricht.

Diese Eigenschaft erlaubt uns, das QD-Schema in einem solchen Fall auch von oben nach unten fortschreitend aufzubauen, wenn die in der obersten Schrägzeile stehenden Werte

$$s_0, q_1^{(0)}, e_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, e_{n-1}^{(0)}, q_n^{(0)}$$

bekannt sind. Dieses Vorgehen, welches einem wohlbekannten Prozess beim gewöhnlichen Differenzenschema völlig analog ist, wird vor allem für die Anwendungen von grosser Bedeutung sein.



1) Vergleiche hierzu § 8.

*Beweis von (6)*

Wir verwenden als Induktionsvoraussetzung die Formel (6) mit  $\sigma - 1$  an Stelle von  $\sigma$ , also die Beziehung

$$p_{\sigma-1}^{(v+1)} - p_{\sigma-1}^{(v)} + e_{\sigma-1}^{(v)} p_{\sigma-2}^{(v+1)} = 0,$$

welche für  $\sigma = 1$  wegen  $p_0^{(v)} \equiv 1$  und  $e_0^{(v)} = 0$  sicher für alle  $v$  erfüllt ist.

Wir bilden nun die Grösse

$$\delta = p_{\sigma}^{(v+1)} - p_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v+1)},$$

die wegen (5) zu

$$z[p_{\sigma-1}^{(v+2)} - p_{\sigma-1}^{(v+1)}] - q_{\sigma}^{(v+1)} p_{\sigma-1}^{(v+1)} + q_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v+1)}$$

wird. Unter Verwendung von

$$q_{\sigma}^{(v+1)} - e_{\sigma}^{(v)} = q_{\sigma}^{(v)} - e_{\sigma-1}^{(v+1)}$$

[siehe (4)] ergibt sich

$$\delta = z[p_{\sigma-1}^{(v+2)} - p_{\sigma-1}^{(v+1)}] - q_{\sigma}^{(v)} [p_{\sigma-1}^{(v+1)} - p_{\sigma-1}^{(v)}] + e_{\sigma-1}^{(v+1)} p_{\sigma-1}^{(v+1)},$$

oder unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung:

$$\delta = -z e_{\sigma-1}^{(v+1)} p_{\sigma-2}^{(v+2)} + q_{\sigma}^{(v)} e_{\sigma-1}^{(v)} p_{\sigma-2}^{(v+1)} + e_{\sigma-1}^{(v+1)} p_{\sigma-1}^{(v+1)},$$

was sich schliesslich unter Verwendung von

$$q_{\sigma}^{(v)} e_{\sigma-1}^{(v)} = q_{\sigma-1}^{(v+1)} e_{\sigma-1}^{(v+1)}$$

[siehe (4)] zu

$$\delta = e_{\sigma-1}^{(v+1)} \{ -z p_{\sigma-2}^{(v+2)} + q_{\sigma-1}^{(v+1)} p_{\sigma-2}^{(v+1)} + p_{\sigma-1}^{(v+1)} \}$$

reduziert. Dieser Ausdruck verschwindet aber wegen (5); was zu beweisen war.

*Beweis von (7)*

Unter Verwendung der mit  $z$  multiplizierten Gleichung (6) ergibt (7):

$$\begin{aligned} p_{\sigma+1}^{(v)} - z p_{\sigma}^{(v+1)} - z e_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v+1)} + q_{\sigma+1}^{(v)} p_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} q_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v)} \\ = [p_{\sigma+1}^{(v)} - z p_{\sigma}^{(v+1)} + q_{\sigma+1}^{(v)} p_{\sigma}^{(v)}] + e_{\sigma}^{(v)} [p_{\sigma}^{(v)} - z p_{\sigma-1}^{(v+1)} + q_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v)}]. \end{aligned}$$

Wegen (5) verschwinden aber die eingeklammerten Ausdrücke; was zu beweisen war.

Als Beispiel sei hier das zum QD-Schema auf Seite 236 gehörige P-Schema angegeben:

$p_0^{(v)}$	$p_1^{(v)}$	$p_2^{(v)}$
1		
	$z - 1$	
1		$z^2 - z - 1$
	$z - 2$	
1		$z^2 - z - 1$
	$z - 1,5$	
1		$z^2 - z - 1$
	$z - 1,666667$	
1		

Man erkennt aus diesem Beispiel sofort eine weitere grundlegende Eigenschaft des QD-Algorithmus, die wir später (§ 7) beweisen werden:

Ist

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_N}{z^{N+1}}$$

eine rationale Funktion mit dem Nenner  $N(z) = z^n + \dots$ , so steht im zugeordneten P-Schema in der Kolonne  $p_n^{(v)}$  für alle  $v$  dasselbe Polynom, nämlich  $N(z)$ .

## 5. Beziehungen zur Kettenbruchtheorie

Wie die Formel (7) zeigt, sind die Polynome  $p_v^{(v)}(z)$  für festes  $v$  gerade die Näherungsnenner des folgenden  $J$ -Kettenbruchs<sup>1)</sup>:

$$f_v(z) = \frac{s_v}{z - q_1^{(v)}} - \frac{e_1^{(v)} q_1^{(v)}}{z - q_2^{(v)} - e_1^{(v)}} - \frac{e_2^{(v)} q_2^{(v)}}{z - q_3^{(v)} - e_2^{(v)}} - \dots \quad (8)$$

Dieser ist wiederum der sogenannte « gerade Teil » des nachstehenden S-Kettenbruchs, in welchen er durch Extension transformiert werden kann<sup>2)</sup>:

$$f_v(z) = \frac{s_v}{z} - \frac{q_1^{(v)}}{1} - \frac{e_1^{(v)}}{z} - \frac{q_2^{(v)}}{1} - \frac{e_2^{(v)}}{z} - \dots \quad (9)$$

Bildet man nun durch Kontraktion den « ungeraden Teil » des Kettenbruchs (9), so resultiert offenbar:

$$f_v(z) = \frac{s_v}{z} \left\{ 1 + \frac{q_1^{(v)}}{z - q_1^{(v)} - e_1^{(v)}} - \frac{e_1^{(v)} q_2^{(v)}}{z - q_2^{(v)} - e_2^{(v)}} - \frac{e_2^{(v)} q_3^{(v)}}{z - q_3^{(v)} - e_3^{(v)}} - \dots \right\},$$

<sup>1)</sup> Vgl. H. WALL [8], §§ 50 und 51.

<sup>2)</sup> Vgl. H. WALL [8], § 96, insbesondere Formeln (96.6), (96.12) und (96.13).

oder wegen (4):

$$z f_v(z) - s_v = \frac{s_{v+1}}{z - q_1^{(v+1)}} - \frac{e_1^{(v+1)} q_1^{(v+1)}}{z - q_2^{(v+1)} - e_1^{(v+1)}} - \frac{e_2^{(v+1)} q_2^{(v+1)}}{z - q_3^{(v+1)} - e_2^{(v+1)}} - \dots = f_{v+1}(z).$$

Es ist also für alle  $v$

$$f_v(z) = \frac{s_v}{z} + \frac{f_{v+1}(z)}{z}$$

und damit offenbar für  $|z| > \limsup |s_{v+1}/s_v|$ :

$$f_v(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_{v+k}}{z^{k+1}}. \quad (10)$$

Das bedeutet insbesondere, dass die Formeln (8) und (9) für  $v = 0$  Kettenbruchentwicklungen der ursprünglich gegebenen Funktion  $f(z)$  darstellen; der QD-Algorithmus leistet somit auch die Kettenbruchentwicklung einer durch eine Potenzreihe  $\sum_0^{\infty} s_k/z^{k+1}$  gegebenen Funktion.

Beispielsweise ergibt sich aus dem QD-Schema für die Fibonacciischen Zahlen (Seite 236) der endliche  $S$ -Kettenbruch

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{1}$$

für die Funktion  $z/(z^2 - z - 1)$ .

Auf Grund dieses Zusammenhanges lassen sich sofort gewisse Ergebnisse aus der Kettenbruchtheorie auf den QD-Algorithmus übertragen. Beispielsweise sind die im  $J$ -Kettenbruch (8) als Teilzähler auftretenden Grössen  $e_{\sigma}^{(v)} q_{\sigma}^{(v)}$  mit den Reihenkoeffizienten der durch den Kettenbruch dargestellten Funktion (10) in folgender Weise verknüpft<sup>1)</sup>:

$$e_{\sigma}^{(v)} q_{\sigma}^{(v)} = \frac{H_{\sigma+1}^{(v)} H_{\sigma-1}^{(v)}}{(H_{\sigma}^{(v)})^2}.$$

Hierbei ist  $H_0^{(v)} = 1$  und

$$H_{\sigma}^{(v)} = \begin{vmatrix} s_v & s_{v+1} & \dots & s_{v+\sigma-1} \\ s_{v+1} & s_{v+2} & \dots & s_{v+\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{v+\sigma-1} & s_{v+\sigma} & \dots & s_{v+2\sigma-2} \end{vmatrix} \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Vgl. § 42, insbesondere Formeln (42.3) und (42.7) bei H. WALL [8].



Ferner ist ja nach (4)

$$s_{\sigma}^{(\nu)} = e_{\sigma-1}^{(\nu)} s_{\sigma-1}^{(\nu+1)} = \{ e_{\sigma-1}^{(\nu)} q_{\sigma-1}^{(\nu)} \} s_{\sigma-1}^{(\nu)} \quad \text{oder} \quad s_{\sigma}^{(\nu)} = s_1^{(\nu)} \prod_{\mu=1}^{\sigma-1} (e_{\mu}^{(\nu)} q_{\mu}^{(\nu)}) .$$

Damit wegen (11):

$$s_{\sigma}^{(\nu)} = \frac{H_{\sigma}^{(\nu)}}{H_{\sigma-1}^{(\nu)}} \quad \text{und} \quad q_{\nu}^{(\sigma)} = \frac{H_{\sigma}^{(\nu+1)} H_{\sigma-1}^{(\nu)}}{H_{\sigma}^{(\nu)} H_{\sigma-1}^{(\nu+1)}} . \quad (12)$$

Aber auch die Näherungsnenner  $p_{\sigma}^{(\nu)}(z)$  des Kettenbruchs (8) kann man explizite durch die Reihenkoeffizienten ausdrücken. Weil nämlich der  $\sigma$ -te Näherungsbruch von  $f_{\nu}(z)$  (dessen Nenner  $p_{\sigma}^{(\nu)}$  ist), bis zum Glied  $1/z^{2\sigma}$  einschliesslich mit  $f_{\nu}(z)$  übereinstimmen muss (vgl. [8], §51), müssen im Produkt  $f_{\nu}(z) p_{\sigma}^{(\nu)}(z)$  die Glieder mit

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots, \frac{1}{z^{\sigma}}$$

sämtliche verschwinden. Daraus folgt aber wegen

$$f_{\nu}(z) = \frac{s_{\nu}}{z} + \frac{s_{\nu+1}}{z^2} + \frac{s_{\nu+2}}{z^3} + \dots$$

und weil  $p_{\sigma}^{(\nu)}(z)$  mit  $z^{\sigma} + \dots$  beginnt:

$$p_{\sigma}^{(\nu)}(z) = \frac{1}{H_{\sigma}^{(\nu)}} \begin{vmatrix} s_{\nu} & s_{\nu+1} & \dots & s_{\nu+\sigma-1} & 1 \\ s_{\nu+1} & s_{\nu+2} & \dots & s_{\nu+\sigma} & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\nu+\sigma} & s_{\nu+\sigma+1} & \dots & s_{\nu+2\sigma-1} & z^{\sigma} \end{vmatrix} . \quad (13)$$

## 6. Schwierigkeiten bei der Bildung des QD-Schemas

Die Quotientenbildung im QD-Schema wird natürlich gestört, sobald einer der Werte  $s_{\sigma}^{(\nu)}$  verschwindet; man muss aber zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

$$\text{a) Es sei } s_{\sigma}^{(\nu)} = 0; \text{ aber } s_{\sigma}^{(\nu+1)} \neq 0$$

Dann wird  $q_{\sigma}^{(\nu)} = \infty$ , so dass das QD-Schema in einem von diesem Element aus nach rechts öffnenden Winkelraum nicht definiert ist. Man kann leicht feststellen (vgl. [8], §50), dass dann auch der  $J$ -Kettenbruch (8) für die Funktion  $f_{\nu}(z)$  nicht existiert.

$$\text{b) Es sei } s_{\sigma}^{(\nu)} = 0 \text{ für alle } \nu \geq \mu$$

In diesem Fall kann man das QD-Schema sinnvoll nach rechts und unten fortsetzen, indem man für die sich zunächst als  $0/0$  ergebenden Quotienten  $q_{\sigma}^{(\nu)}$

( $\nu \geq \mu$ ) konsequent den Wert 0 einsetzt. Es erscheinen dann im QD-Schema rechts und unterhalb des Elementes  $s_{\sigma}^{(\mu)}$  (welches im nachstehenden Beispiel eingerahmt ist) nur noch Nullen. Für den Kettenbruch (8) der Funktion  $f_{\nu}(z)$  ( $\nu \geq \mu$ ) bedeutet dies, dass die Näherungsbrüche  $R_{\sigma}$ ,  $R_{\sigma+1}$  usw. sich nur noch formal durch Faktoren  $z^{\kappa}$  im Zähler und Nenner unterscheiden und nach dem Kürzen alle gleich sind.  $f_{\nu}(z)$  ist dann also rational und damit auch  $f(z)$ .

Das identische Verschwinden der  $e_{\sigma}^{(\nu)}$  und  $q_{\sigma}^{(\nu)}$  rechts und unterhalb einer gewissen Stelle wirkt sich entsprechend auch auf die Polynome  $p_{\sigma}^{(\nu)}$  aus. In der Tat muss nach (6)  $p_{\sigma}^{(\nu)}(z)$  von  $\nu$  unabhängig sein, wenn alle  $e_{\sigma}^{(\nu)}$  verschwinden; ausserdem wird  $p_{\sigma}^{(\nu)} = z p_{\sigma-1}^{(\nu+1)}$ , wenn  $q_{\sigma}^{(\nu)} = 0$  ist.

*Beispiel:* QD-Schema für  $f(z) = \frac{z^2 + 2}{z^2(z+1)}$

$s_1^{(\nu)} = s_{\nu}$	$q_1^{(\nu)}$	$e_1^{(\nu)}$	$s_2^{(\nu)}$	$q_2^{(\nu)}$	$d_2^{(\nu)}$	$e_2^{(\nu)}$	$s_3^{(\nu)}$	$q_3^{(\nu)}$	$d_3^{(\nu)}$	$e_3^{(\nu)}$	$s_4^{(\nu)}$
1											
-1	-1										
	-3	-2	2								
+3		+2	6	3							
	-1			0	-3	-1	-6				
-3		0	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	0	0	0	0	0		0	0
	-1			0				0			
+3		0	0		0	0	0				

*Zugehöriges P-Schema*

$p_0^{(\nu)}$	$p_1^{(\nu)}$	$p_2^{(\nu)}$	$p_3^{(\nu)}$	$p_4^{(\nu)}$
1				
	$z+1$			
1		$z^2-3$		
	$z+3$		$z^2(z+1)$	
1		$z(z+1)$		$z^3(z+1)$
	$z+1$		$z^2(z+1)$	
1		$z(z+1)$		

## 7. Grundlegende Eigenschaften des QD-Algorithmus

Wir wollen hier die bereits in §3 auf Grund eines numerischen Beispiels vermutete Eigenschaft des QD-Algorithmus beweisen. Zunächst folgt aus §6 unmittelbar:

*Satz 1. Verschwinden die  $n$ -ten modifizierten Differenzen  $e_n^{(\nu)}$  im QD-Schema für alle  $\nu$ , so ist*

$$f(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{s_{\kappa}}{z^{\kappa+1}}$$

*eine rationale Funktion, deren Nenner höchstens den Grad  $n$  hat.*

Es gilt aber auch umgekehrt:

*Satz 2. Wird mit den Koeffizienten  $s_x$  einer rationalen Funktion*

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_x}{z^{x+1}},$$

*deren Nenner  $N(z)$  den Grad  $n$  hat, das QD-Schema aufgestellt<sup>1)</sup>, so verschwinden die  $n$ -ten modifizierten Differenzen  $e_n^{(v)}$  für alle  $v$ .*

*Ferner hat das zugeordnete P-Schema die Eigenschaft, dass die Polynome  $p_n^{(v)}(z)$  für alle  $v$  gleich dem Nenner  $N(z)$  der Funktion  $f(z)$  sind.*

Die Voraussetzung von Satz 2 ist insbesondere dann erfüllt, wenn die  $s_x$  Schwarzsche Konstanten einer endlichen Matrix  $A$  in bezug auf beliebige Anfangsvektoren sind.

### Beweis von Satz 2

Ist  $f(z)$  rational und regulär an der Stelle  $z = 0$ , so sind auch die  $f_v(z)$  rational, und zwar alle mit demselben Nenner  $N(z)$ . Nun ist aber der  $J$ -Kettenbruch einer rationalen Funktion, falls er überhaupt existiert<sup>2)</sup>, immer endlich, und die Folge der Näherungsnenner desselben endet mit dem Nenner  $N(z)$  der rationalen Funktion. Im Fall der Funktion  $f_v(z)$  heisst dies, dass die Folge der Polynome  $p_\sigma^{(v)}(z)$  für jedes feste  $v$  wie folgt beschaffen ist:

$$p_0^{(v)} \equiv 1; \quad p_1^{(v)}(z), p_2^{(v)}(z), \dots, p_{n-1}^{(v)}(z), p_n^{(v)}(z) = N(z).$$

Damit ist der zweite Teil des Satzes bereits bewiesen, und der erste Teil ergibt sich anschliessend aus (6) mit  $\sigma = n$ , weil ja die Polynome  $p_{n-1}^{(v)} = z^{n-1} + \dots$  sicher nicht identisch verschwinden.

Ist hingegen  $z = 0$  ein  $r$ -facher Pol von  $f(z)$ , so ist  $f_r(z)$  eine rationale Funktion, die an der Stelle  $z = 0$  regulär ist und deren Nenner den Grad  $n - r$  hat. Somit folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass  $e_{n-r}^{(v)} = 0$  für  $v \geq r$  (und ebenso  $s_{n+1-r}^{(v)} = 0$ ). Nun kann man offenbar das QD-Schema in der in § 6 unter b) angegebenen Weise ergänzen und findet, dass bereits für  $v \geq r - 1$   $e_{n-r+1}^{(v)} = 0$  ist, ferner  $e_{n-r+2}^{(v)} = 0$  für  $v \geq r - 2$  usw., bis schliesslich  $e_n^{(v)} = 0$  für alle  $v > 0$ ; was zu beweisen war.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des QD-Schemas, die sich insbesondere auch zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms eignet (vgl. die angekün-

1) Falls das QD-Schema existiert. Ist  $z = 0$  ein Pol von  $f(z)$ , so gilt Satz 2 nur dann, wenn das QD-Schema gemäss der in § 6 unter b) gemachten Bemerkung bis zur Kolonne  $e_n^{(v)}$  ergänzt wird.

2) Nichtexistenz dieses Kettenbruchs führt nach [8], §§ 41 und 42, sofort auf  $H_\sigma^{(v)} = 0$  für ein gewisses  $\sigma < n$  und damit wegen (12) aus  $s_\sigma^{(v)} = 0$ . Es muss damit Fall § 6 a vorliegen, denn § 6 b würde die Existenz nicht stören.

digte Arbeit über die Anwendungen des QD-Algorithmus) ergibt sich fast unmittelbar aus der erwähnten Arbeit von AITKEN:

*Satz 3. Ist die Funktion  $f(z)$  rational und haben ihre Pole verschiedene Absolutbeträge:  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots$  so gilt für das QD-Schema der Koeffizienten von  $f(z)$ :*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} q_{\sigma}^{(\nu)} = \lambda_{\sigma}, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} e_{\sigma}^{(\nu)} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

*Beweis.* Nach AITKEN gilt unter den gemachten Voraussetzungen:

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{H_m^{(\nu+1)}}{H_m^{(\nu)}}.$$

Schreibt man dies für  $m = \sigma$  und  $m = \sigma - 1$  an und dividiert, so folgt wegen (12) sofort die erste der Beziehungen (14). Für den Beweis der zweiten Behauptung betrachten wir den Quotienten

$$\frac{e_{\sigma}^{(\nu+1)}}{e_{\sigma}^{(\nu)}} = \frac{q_{\sigma+1}^{(\nu)}}{q_{\sigma}^{(\nu+1)}},$$

der für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen  $\lambda_{\sigma+1}/\lambda_{\sigma}$  konvergiert. Also strebt  $e_{\sigma}^{(\nu)}$  wie  $(\lambda_{\sigma+1}/\lambda_{\sigma})^{\nu}$  gegen 0; was zu beweisen war.

Die Aussage von Satz 3 kann wie folgt verallgemeinert werden:

*Satz 4.* Es könne die Funktion

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_{\kappa}}{z^{\kappa+1}}$$

in folgender Weise zerlegt werden:  $f(z) = R(z) + \varphi(z)$ . Dabei sei  $R(z)$  eine für  $|z| < R$  rationale Funktion mit dem Nenner  $N(z) = z^n + \dots$  und  $\varphi(z)$  eine nicht notwendigerweise rationale, aber für  $|z| \geq \vartheta R$  ( $\vartheta < 1$ ) reguläre Funktion.

Dann gilt, sofern das QD-Schema existiert und insbesondere die Polynome  $p_{\sigma}^{(\nu)}(z)$  ( $\sigma = 0, 1, 2, \dots, n$ ) für unendlich viele Indexwerte  $\nu_j$  definiert sind:

$$\lim_{\nu_j \rightarrow \infty} p_n^{(\nu_j)}(z) = N(z). \quad (15)$$

Der Beweis dieser Behauptung kann ohne weiteres der erwähnten Arbeit von HADAMARD [2], §§ 14 bis 21, entnommen werden; allerdings wird dort eine Funktion  $f(z)$  betrachtet, die nach aufsteigenden Potenzen von  $z$  entwickelt ist. Die bei HADAMARD auftretenden Polynome

$$\mathfrak{P}_m = 1 + A_m^{(1)} z + A_m^{(2)} z^2 + \dots + A_m^{(p)} z^p,$$

$$\mathfrak{P}'_m = 1 + A_m'^{(1)} z + A_m'^{(2)} z^2 + \dots + A_m'^{(q)} z^q,$$



deren Koeffizienten durch die Gleichungen (18), (18') bei [2] definiert sind, entsprechen den in dieser Arbeit verwendeten Polynomen  $\hat{p}_p^{(m)}(z)$ ,  $\hat{p}_q^{(m)}(z)$  usw.; wobei die Indizes  $p, q, r$  so bestimmt sind, dass

$$\begin{aligned} |\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_p| = \varrho > |\lambda_{p+1}| = |\lambda_{p+2}| = \dots \\ = |\lambda_q| = \varrho' > |\lambda_{q+1}| = \dots = \varrho'' > \dots \end{aligned}$$

HADAMARD beweist dann, dass diese Polynome  $\mathfrak{P}_m$  und  $\mathfrak{P}'_m$  für  $m \rightarrow \infty$  gegen Polynome  $\mathfrak{P}$  bzw.  $\mathfrak{P}'$  konvergieren, deren Nullstellen genau die ersten  $p$  bzw. die ersten  $q$  Pole von  $f(z)$  sind, und zwar ist die Konvergenz etwa so gut wie die einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten  $\varrho'/\varrho$  bzw.  $\varrho''/\varrho'$ .

Dem Satz 4 kann man folgende Aussagen entnehmen, die wir hier ohne Beweis angeben:

*Folgerung 1.* Für die Gültigkeit der Aussage (14) (Satz 3) für einen einzelnen Indexwert  $\sigma = k$  ist bereits die Bedingung  $|\lambda_{k-1}| > |\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|$  hinreichend.

*Folgerung 2.* Baut man mit den Werten  $q_\sigma^{(v)}$  und  $e_\sigma^{(v)}$  des QD-Schemas analog zu (5) die Polynome  $\hat{p}_\sigma^{(v)}(z)$  nach folgender Vorschrift auf:

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m^{(v)}(z) &\equiv 1 \quad \text{für alle } v, \\ \hat{p}_\sigma^{(v)}(z) &= z \hat{p}_{\sigma-1}^{(v+1)}(z) - q_\sigma^{(v)} \hat{p}_{\sigma-1}^{(v)}(z) \quad (\sigma = m+1, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

so gilt unter der Voraussetzung

$$|\lambda_m| > |\lambda_{m+1}| \geq |\lambda_{m+2}| \geq \dots \geq |\lambda_n| > |\lambda_{n+1}| \dots$$

die Beziehung

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \hat{p}_n^{(v)}(z) = (z - \lambda_{m+1})(z - \lambda_{m+2}) \dots (z - \lambda_n). \quad (17)$$

## 8. Beziehungen zum BO-Algorithmus von C. Lanczos

Wie bereits in §4 erwähnt, stammt von LANCZOS ein Verfahren zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms einer Matrix  $A$  aus Schwarzschen Konstanten  $s_v$  (bei LANCZOS mit  $c_v$  bezeichnet). Es werden dort nach einem bestimmten Verfahren aus den  $s_v$  die Polynome  $p_0 \equiv 1$ ;  $p_1(z)$ ,  $p_2(z)$ , ... gebildet, deren letztes,  $p_m(z)$ , das Minimalpolynom von  $A$  ist.

Aus dem Gleichungssystem (48) bei [5], dem die Koeffizienten des Polynoms

$$\hat{p}_\sigma(z) = z^\sigma + \eta_{\sigma-1} z^{\sigma-1} + \dots + \eta_1 z + \eta_0$$

genügen müssen, geht hervor, dass  $\hat{p}_\sigma(z)$  ebenfalls Näherungsnenner des  $J$ -Ket-

tenbruchs von

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$$

sein muss, mit andern Worten:

Die von LANCZOS konstruierten Polynome  $p_\sigma(z)$  stimmen mit den zugeordneten Polynomen  $p_\sigma^{(0)}(z)$  des QD-Schemas der  $c_n$  überein.

Genauere Betrachtungen zeigen ferner, dass das algorithmische Schema von LANCZOS<sup>1)</sup> mit den hier verwendeten Bezeichnungen wie folgt ausgefüllt werden kann:

	0	0,5	1	1,5	2	2,5	
$h_i =$	$s_1^{(0)}$	$s_1^{(1)}$	$s_2^{(0)}$	$s_2^{(1)}$	$s_3^{(0)}$	$s_3^{(1)}$	
$q_j =$	$-q_1^{(0)}$	$-e_1^{(0)}$	$-q_2^{(0)}$	$-e_2^{(0)}$	$-q_3^{(0)}$	$-e_3^{(0)}$	
$s_0$	1	0	0	0	0	0	
$s_1$		1		0	0	0	
$s_2$						0	
			Koeffizienten von $p_1^{(0)}(z)$	Koeffizienten von $p_1^{(1)}(z)$	Koeffizienten von $p_2^{(0)}(z)$	Koeffizienten von $p_2^{(1)}(z)$	(18)

LANCZOS hat ferner gezeigt, dass dieselben Polynome  $p_\sigma^{(0)}(z)$  auch auftreten, wenn man die Vektoren  $x_0, y_0$ , die zur Erzeugung der Schwarzschen Konstanten  $s_x$  der Matrix  $A$  dienen, als Anfangsvektoren für den BO-Algorithmus verwendet<sup>2)</sup>. Da diese Polynome ferner mit den Elementen  $\alpha_\sigma, \beta_\sigma$  der Kodiagonalmatrix durch die Relationen

$$p_1^{(0)}(z) - (z - \alpha_1) p_0^{(0)} = 0,$$

$$p_{\sigma+1}^{(0)}(z) - (z - \alpha_{\sigma+1}) p_\sigma^{(0)}(z) + \beta_\sigma p_{\sigma-1}^{(0)}(z) = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots)$$

verknüpft sind, folgt durch Vergleich mit (7) sofort eine Beziehung zwischen der mit dem BO-Algorithmus erzeugten Kodiagonalform der Matrix  $A$  und den mit denselben Anfangsvektoren  $x, y$  mit dem QD-Algorithmus erhaltenen Werten  $q_\sigma^{(0)}$  und  $e_\sigma^{(0)}$ :

$$\alpha_1 = q_1^{(0)}, \quad \alpha_\sigma = q_\sigma^{(0)} + e_{\sigma-1}^{(0)}, \quad \beta_\sigma = q_\sigma^{(0)} e_\sigma^{(0)} \quad (\sigma = 1, 2, \dots) \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Tabelle 1, Seite 263, bei [4] oder Seite 176 bei [5].

<sup>2)</sup> Diese Polynome sind in der Arbeit [6], Seite 41, mit  $p_{\sigma+1}(\lambda)$  bezeichnet.

Diese Formeln vereinfachen auch die Schreibweise des  $J$ -Kettenbruchs (8) der Funktion  $f(z)$  zu

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \alpha_1} - \frac{\beta_1}{z - \alpha_2} - \frac{\beta_2}{z - \alpha_3} - \dots$$

Wie man leicht einsieht, haben nicht nur die Grössen

$$q_{\sigma}^{(0)} + e_{\sigma-1}^{(0)} \quad \text{und} \quad q_{\sigma}^{(0)} e_{\sigma}^{(0)}$$

eine bestimmte Bedeutung für den BO-Algorithmus, sondern auch

$$\alpha_{\sigma}^{(\nu)} = q_{\sigma}^{(\nu)} + e_{\sigma-1}^{(\nu)}, \quad \beta_{\sigma}^{(\nu)} = q_{\sigma}^{(\nu)} e_{\sigma}^{(\nu)} \quad (\sigma = 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, \dots). \quad (20)$$

Es sind dies nämlich die Kodiagonalelemente, die man erhält, wenn man den BO-Algorithmus mit den Anfangsvektoren  $A^{\kappa} \kappa$  und  $(A^*)^{\nu-\kappa} y^1$  an Stelle von  $\kappa, y$  beginnt.

Demnach enthält das QD-Schema soviel Information, wie man durch vielfache Anwendung des BO-Algorithmus erhält; wir werden in den Anwendungen darauf zurückkommen.

## 9. Beziehungen zum cg-Algorithmus<sup>2)</sup>

Die Beziehung, die nach [3], § 18, zwischen dem cg-Algorithmus und den Kettenbrüchen besteht, lässt auch eine Querverbindung zwischen cg-Algorithmus und QD-Algorithmus vermuten:

Sei  $A$  eine reell symmetrische Matrix; mit dieser bilden wir einerseits die Schwarzschen Konstanten  $s_{\nu}$  für die Anfangsvektoren  $\kappa$  und  $y = \kappa$  sowie anschliessend das QD-Schema.

Andererseits führen wir aber mit demselben Anfangsvektor  $r_0 = \kappa$  den cg-Algorithmus durch (Formelgruppe 5.1 bei [3]), allerdings ohne das Gleichungssystem aufzulösen. Die dadurch erzeugten Residuenvektoren  $r_i$  genügen nach den Formeln (5.8) und (5.9) bei [3] den Relationen

$$\left. \begin{aligned} A r_0 &= -\frac{1}{a_0} r_1 + \frac{1}{a_0} r_0, \\ A r_i &= -\frac{1}{a_i} r_{i+1} + \left( \frac{1}{a_i} + \frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} \right) r_i - \frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} r_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots), \\ (r_i, r_j) &= 0 \quad \text{für } i \neq j. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

<sup>1)</sup> Die Wahl von  $\kappa$  beeinflusst dann zwar das Biorthogonalsystem, nicht aber die Kodiagonalmatrix.

<sup>2)</sup> cg-Algorithmus = Synonym für: Verfahren der konjugierten Gradienten von STIEFEL HESTENES (siehe [3]).

Dieselben Vektoren  $r_i$  liefert aber auch der BO-Algorithmus in der Form (2'), (3') bei [6], wenn man für die dort auftretenden  $s_{k+1}$ -Skalare  $-1/a_{k-1}$  einsetzt; man erhält dann (wegen  $A = A^*$ ):

$$\left. \begin{aligned} A x_1 &= -\frac{1}{a_0} x_2 + \alpha_1 x_1, \\ A x_\sigma &= -\frac{1}{a_{\sigma-1}} x_{\sigma+1} + \alpha_\sigma x_\sigma + \gamma_{\sigma-1} x_{\sigma-1} \quad (\sigma = 2, 3, \dots), \\ (x_i, x_j) &= 0 \text{ für } i \neq j. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Vergleich von (21) und (22) liefert die folgenden Korrespondenzen zwischen den beim cg- und BO-Algorithmus auftretenden Grössen

$$\left. \begin{aligned} x_{\sigma+1} &= r_\sigma, \quad \alpha_1 = \frac{1}{a_0}, \quad \alpha_{\sigma+1} = \frac{1}{a_\sigma} + \frac{b_{\sigma-1}}{a_{\sigma-1}}, \\ \gamma_\sigma &= -\frac{b_{\sigma-1}}{a_{\sigma-1}} \quad \text{oder} \quad \beta_\sigma = \frac{b_{\sigma-1}}{a_{\sigma-1}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Ein weiterer Vergleich mit (19) ergibt nun endlich die gewünschte Beziehung zwischen den  $q, e$  des QD-Algorithmus und den Gewichtskoeffizienten  $a, b$  des cg-Algorithmus:

$$q_\sigma^{(0)} = \frac{1}{a_{\sigma-1}}, \quad e_\sigma^{(0)} = \frac{b_{\sigma-1}}{a_{\sigma-1}} \quad (\sigma = 1, 2, \dots). \quad (24)$$

## 10. Die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(z)$

Nachdem wir Methoden zur Bestimmung der Pole einer Funktion  $f(z)$  entwickelt haben, wollen wir nun versuchen, auch die zugehörigen Residuen zu ermitteln. Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir von der Formel (13) aus, welche dasselbe sagt wie

*Satz 5.* Es ist

$$p_\sigma^{(v)}(z) f_v(z) = \text{Polynom} + \frac{s_{\sigma+1}^{(v)}}{z^{\sigma+1}} + \dots, \quad (25)$$

das heisst der  $\sigma$ -te Näherungsbruch des Kettenbruchs (8) weicht in erster Annäherung um den Betrag  $s_{\sigma+1}^{(v)}/z^{2\sigma+1}$  von  $f_v(z)$  ab.

*Beweis.* In der Tat ergibt sich ja das Verschwinden der Koeffizienten von

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots, \frac{1}{z^\sigma} \quad \text{in} \quad p_\sigma^{(v)}(z) f_v(z)$$

aus § 5, während der Koeffizient von  $1/z^{\sigma+1}$  aus folgender Betrachtung hervorgeht:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Man erhält den Koeffizienten von } 1/z^{\mu+1} \text{ im Produkt } p_\sigma^{(v)}(z) f_v(z) \\ &\text{dadurch, dass man in der Formel (13) die Potenzen } z^\kappa \text{ durch die} \\ &\text{Werte } s_{\nu+\mu+\kappa} \text{ ersetzt.} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$



Daraus folgt – mit  $\mu < \sigma$  – sofort wieder das Verschwinden der Koeffizienten von

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots, \frac{1}{z^\sigma},$$

aber für  $\mu = \sigma$  wird (13) mit der Substitution (26) offenbar zu  $H_{\sigma+1}^{(v)}/H_\sigma^{(v)}$ , was wegen (12) gleich  $s_{\sigma+1}^{(v)}$  ist; was zu beweisen war.

Für die Bestimmung der Residuen von  $f(z)$  benötigen wir nun die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) p_\sigma^{(0)}(z) p_\varrho^{(0)}(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \neq \varrho, \\ s_{\sigma+1}^{(0)} & \text{für } \sigma = \varrho, \end{cases} \quad (27)$$

in welcher  $C$  irgendeinen Weg bedeutet, der alle Singularitäten von  $f(z)$  umschliesst. Diese Formel folgt sofort aus (25), denn für  $\varrho < \sigma$  fehlt in der Entwicklung von

$$f(z) p_\sigma^{(0)}(z) p_\varrho^{(0)}(z)$$

das Glied mit  $1/z$ ; aus Symmetriegründen folgt dasselbe für  $\varrho > \sigma$ , und für  $\sigma = \varrho$  ist der Koeffizient von  $1/z$  tatsächlich  $s_{\sigma+1}^{(0)}$ .

Nehmen wir nun an,  $f(z)$  sei rational und habe  $n$  einfache Pole:

$$f(z) = \sum_{\tau=1}^n \frac{c_\tau}{z - \lambda_\tau}, \quad (28)$$

so erhält man durch Einsetzen in (27)

$$\sum_{\tau=1}^n c_\tau p_\sigma^{(0)}(\lambda_\tau) p_\varrho^{(0)}(\lambda_\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \neq \varrho, \\ s_{\sigma+1}^{(0)} & \text{für } \sigma = \varrho. \end{cases}$$

Diese Gleichung kann in Matrizenform geschrieben werden; definiert man nämlich die Matrizen

$$C = \begin{vmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} s_1^{(0)} & & & \\ & s_2^{(0)} & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n^{(0)} \end{vmatrix}, \quad (29)$$

$$P = \begin{vmatrix} p_0^{(0)}(\lambda_1) & p_0^{(0)}(\lambda_2) & \dots & p_0^{(0)}(\lambda_n) \\ p_1^{(0)}(\lambda_1) & p_1^{(0)}(\lambda_2) & \dots & p_1^{(0)}(\lambda_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1}^{(0)}(\lambda_1) & p_{n-1}^{(0)}(\lambda_2) & \dots & p_{n-1}^{(0)}(\lambda_n) \end{vmatrix},$$

so lautet sie  $PCP^* = S$ . Daraus ergibt sich endlich die Formel für die gesuchten Residuen  $c_\tau$ :

$$C^{-1} = P^* S^{-1} P, \quad (30)$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{1}{s_{\sigma+1}^{(0)}} p_{\sigma}^{(0)}(\lambda_{\tau}) p_{\sigma}^{(0)}(\lambda_{\nu}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \tau, \\ \frac{1}{c_{\tau}} & \text{für } \nu = \tau. \end{cases} \quad (30')$$

Da aus (28) sofort folgt, dass für alle  $\nu$

$$s_{\nu} = \sum_{\tau=1}^n c_{\tau} \lambda_{\tau}^{\nu} \quad (31)$$

ist, kann man die Formeln für die Bestimmung der  $c_{\tau}$  auch gebrauchen, um aus den Werten  $s(0), s(1), \dots, s(2n-1)$  eine Funktion

$$s(x) = \sum_1^n c_{\tau} \lambda_{\tau}^x$$

zu konstruieren, die an den Stellen  $\nu = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$  die vorgeschriebenen Werte  $s(\nu) = s_{\nu}$  annimmt (Interpolation durch Exponentialsummen).

*Beispiel.* Gesucht eine Funktion  $s(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x$ , die die Werte

$$s(0) = -1, \quad s(1) = 2, \quad s(2) = 16 \quad \text{und} \quad s(3) = 68$$

annimmt. Wir stellen das QD-Schema auf:

$s_1^{(\nu)}$	$q_1^{(\nu)}$	$e_1^{(\nu)}$	$s_2^{(\nu)}$	$q_2^{(\nu)}$
-1				
	-2			
2		10	20	
	8			-3
16		-3,75	-60	
	4,25			
68				

Hier ist

$$p_0^{(\nu)} \equiv 1, \quad p_1^{(\nu)} = z + 2, \quad p_2^{(\nu)} = z^2 - 5z + 6,$$

also  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ . Ferner

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

und damit

$$C^{-1} = P^* S^{-1} P = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix},$$

also

$$c_1 = 4, \quad c_2 = -5 \quad \text{oder} \quad s(x) = 4 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x.$$

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. C. AITKEN, *On Bernoulli's Numerical Solution of Algebraic Equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 46, 289–305 (1925/26).
- [2] J. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, Thèse (Gauthier-Villars, Paris 1892).
- [3] M. R. HESTENES und E. STIEFEL, *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, J. Res. Nat. Bur. Standards 49, 409–436 (1952).
- [4] C. LANCZOS, *An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators*, J. Res. Nat. Bur. Standards 45, 255–282 (1950).
- [5] C. LANCZOS, *Proceedings of a Second Symposium on Large Scale Calculating Machinery*, (1949), S. 164–206.
- [6] H. RUTISHAUSER, *Beiträge zur Kenntnis des Biorthogonalisierungsalgorithmus von C. Lanczos*, ZAMP 4, 35–56 (1953).
- [7] E. STIEFEL, *Zur Berechnung höherer Eigenwerte symmetrischer Operatoren mit Hilfe der Schwarzschen Konstanten*, Zamm 33, 260–262, (1953).
- [8] H. WALL, *Analytic Theory of Continued Fractions* (Van Nostrand Comp. Inc., New York 1948).

### Summary

The quotient-difference (= QD) algorithm developed by the author may be considered as an extension of BERNOULLI's method for solving algebraic equations. Whereas BERNOULLI's method gives the dominant root as the limit of a sequence of quotients  $q_1^{(v)} = s_1^{(v+1)}/s_1^{(v)}$  formed from a certain numerical sequence  $s_1^{(v)}$ , the QD-algorithm gives (under certain conditions) all the roots  $\lambda_\sigma$  as the limits of similar quotient sequences  $q_\sigma^{(v)} = s_\sigma^{(v+1)}/s_\sigma^{(v)}$ . Close relationship exists between this method and the theory of continued fractions. In fact the QD-algorithm permits developing a function given in the form of a power series into a continued fraction in a remarkably simple manner.

In this paper only the theoretical aspects of the method are discussed. Practical applications will be discussed later.

(Eingegangen: 5. August 1953.)

## 723 A/B Reflex Klystron Performance

By GIACINTO ZITO, Turin<sup>1)</sup>

### 1. Foreword

During a systematic series of measurements carried out on a 723 A/B Reflex Klystron it was possible to outline the results in a number of diagrams which proved to be of a considerable practical value inasmuch as they make it possible to follow, at a given load, the behaviour of the tube during the simultaneous variations of the applied voltages to the anode and the reflector. The practical value of these diagrams is evident in that they enable one to obtain very pure amplitude and frequency modulation and to reach conditions of very stable operation.

### 2. Klystron Characteristic Curves and Methods Used in Obtaining Them

Consider the circuit shown in Figure 1. Through varying simultaneously the anode (resonator) voltage  $V_a$  and the reflector voltage  $V_r$  so as to keep

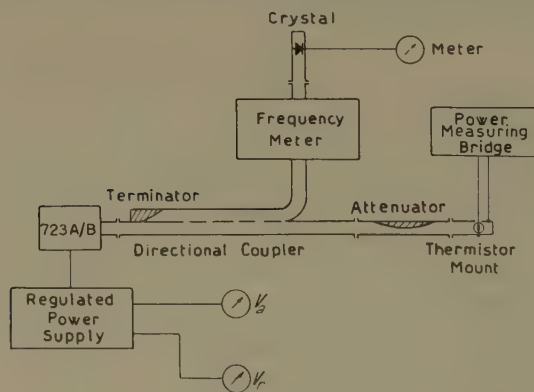


Figure 1

Circuit for the measurement of static klystron performance.

constant the frequency generated by the klystron tube, a nearly linear relation between  $V_a$  and  $V_r$  is obtained. In other words the ratio between the variations

<sup>1)</sup> Istituto Elettrotecnico Nazionale «Galileo Ferraris».



of the anode voltage and the reflector voltage along a constant frequency curve is nearly constant.

The approximate linearity of the curves is to be interpreted as a consequence of the linear variation of the potential in the drift space which would be obtained exactly in the case of parallel flat electrodes and in the absence of space charge.

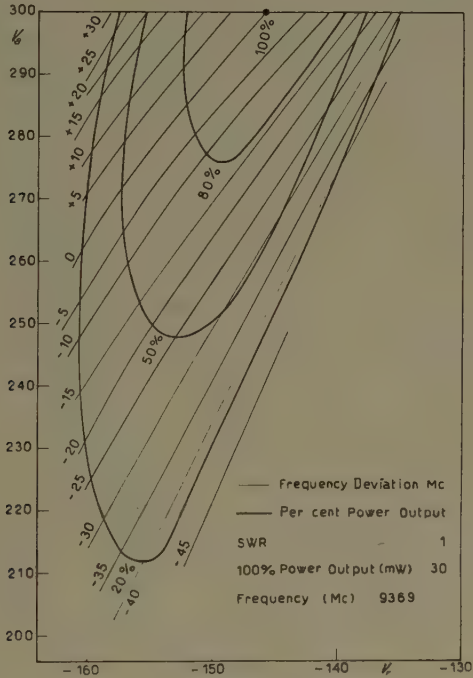


Figure 2  
Performance diagram, first mode.

Slight deviations from linearity may be due to the different geometry of the electrodes, to the effect of the space charge, also to the fact that in general along a curve of constant frequency the dissipated power is variable. It follows that a variation of the operating temperature in the tube may modify its geometry with consequent frequency variations.

A number of these curves at different frequencies are shown in the diagrams of Figures 2, 3, and 4, corresponding to three operating modes of the klystron tube.

Simultaneous power measurements were carried out by means of a thermistor and a direct reading bridge (see Figure 1). On the diagrams of Figures 2, 3, and 4 a series of constant power curves have been sketched. In the diagrams

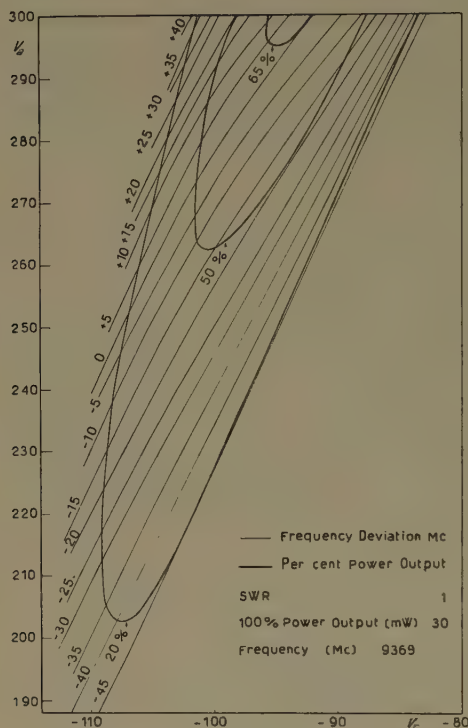


Figure 3

Performance diagram, second mode.

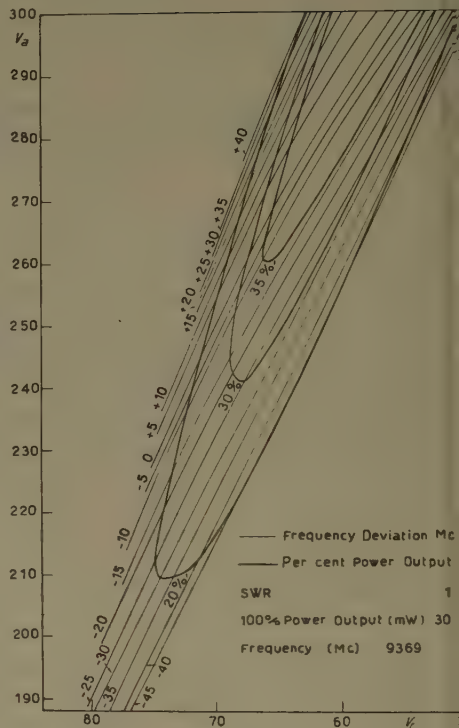


Figure 4

Performance diagram, third mode.

the curve  $\Delta f = 0$  refers to the frequency of 9369 Mc. The frequency difference between two adjacent curves is 5 Mc.

The output power (30 mW) at the point  $V_a = 300$  V on the curve  $\Delta f = 0$  (see Figure 2), has been taken as the reference value of 100% for the constant power curves.

Since the thermistor mount does not produce appreciable reflections across the entire band, the load is constant and equal to the characteristic impedance of the waveguide.

The constant power curves are similar to a series of parabolas, with power values increasing from the outside parabola to the inside ones. The point marked 100% in the diagram of Figure 2 would be the vertex of the parabola 100% power which would develop wholly above the 300 V abscissa, but which is not drawn in the diagram.

At the ends of the constant frequency curves the power diminishes quickly to zero.

### 3. Examples of Utilization

#### 3.1. *Amplitude Modulation*

If amplitude modulation is produced by feeding only one of the tube electrodes, as is usually done, undesired frequency modulation cannot be avoided. For this reason, it is often necessary to resort to some method of pulse modulation. In some cases, however, especially in the measurement field, the large frequency spectrum inherent to pulse modulation may cause certain difficulties which limit the utility of this system. In these cases, a considerable advantage can be obtained if the amplitude modulation is produced by modulating anode and reflector electrodes at the same time, utilizing a region on the diagrams where the power varies considerably along one of the constant frequency curves. The diagram of Figure 2 presents the wanted requirement in the region between the frequency curves  $\Delta f = 0$  and  $\Delta f = +5$  and the power curves  $P = 50\%$  and  $P = 100\%$ .

In order that the point of operation should stay on a constant frequency curve during the modulation process, it is necessary to vary simultaneously the anode voltage and the reflector voltage so that, at every instant, the ratio between their peak variations  $\Delta V_a$  and  $\Delta V_r$  is constant and equal to the slope of a curve  $V_a$  versus  $V_r$ , as shown in Figure 2. The amplitude and phase relation between voltages  $V_a$  and  $V_r$  can be easily obtained by means of two transformers having the secondary windings in series with the anode and reflector circuits. It may be necessary to limit the maximum value of the depth of modulation to about 50%, in order to avoid distortion. However, this condition does not limit the practical usefulness of the system for measurement purposes.

#### 3.2. *Frequency Modulation*

The frequency modulation is generally obtained by the superposition of a sinusoidal or saw-tooth voltage on the bias voltage of the reflector. The frequency variation will then depend on the amplitude of the modulating voltage. However, a certain amount of amplitude modulation will always accompany the desired frequency modulation.

From Figures 2, 3, and 4, it appears possible to obtain frequency modulation free from amplitude modulation, if the nearly straight parts of the constant power curves are employed where they cross a great number of constant frequency curves of uniform spacing. In view of the shape of the curves, the further from the vertices the more favourable are the regions for such a system.

The mode of Figure 4 is more suitable for frequency modulation, both because the constant frequency curves are closer to each other, and because the nearly straight curves are in a region of not too high anode voltages.

In order to maintain the operating point on the straight part of the constant power curves during the modulation process, it is necessary, as in the previous case, to keep the ratio between the anode-voltage and reflector-voltage variations constant.

By choosing the correct point of operation, simply varying the above mentioned ratio, it is furthermore possible to pass from amplitude modulation to frequency modulation. In some cases this possibility may be of practical value.

### 3.3. Stability

In each mode of operation, for lower frequencies, the branches of the curves  $P = \text{const}$  are parallel to the constant frequency curves for considerable lengths. This fact is accentuated especially in the modes of Figures 3 and 4.

This coincidence makes it possible for the tube to operate with high stability if anode voltage and reflector voltage are regulated so that at any instant their ratio is constant.

Values of output power which can be as low as 20% of the maximum correspond to these regions of good stability. However, the power may be high enough for laboratory purposes.

## 4. Experimental Tests

### 4.1. Circuit

By means of the circuit shown in Figure 5, a number of experiments have been conducted. By referring to curves obtained in these experiments, the correctness of the previous deductions has been verified.

The 50 c/s power-line voltage simultaneously modulates anode and reflector electrodes of the klystron tube by means of two transformers:  $T_3$  and  $T_4$  (see Figure 5). A variable ratio transformer  $T_2$  inserted on the primary  $T_3$  allows a continuous variation of the ratio between the secondary voltages of  $T_3$  and  $T_4$ . A phasing network compensates the phase shift in the transformers. Inasmuch as in obtaining amplitude modulation, frequency modulation and good stability, a decrease of reflector voltage must correspond to an increase of anode voltage, the connections of the two transformers are such that the two secondary voltages are  $180^\circ$  out of phase.

The klystron-output power, properly attenuated, is detected by crystal-1, and the rectified voltage is applied through a switch to the vertical plates of a cathode-ray oscilloscope having a D.C. amplifier.

By means of a directional coupler, inserted before the attenuator, a portion of the power is taken out and applied to a frequency meter. The crystal-2 voltage, through the above mentioned switch, can in turn be applied, after due amplification, to the vertical plates of the oscilloscope.

The oscilloscope-sweep voltage is derived from the power line through a phasing network.

#### 4. 2. Measurements carried out

4.2.1. In order to obtain amplitude modulation, a curve of frequency a little higher than the curve  $\Delta f = 0$  of Figure 2, has been utilized in the region between the power curves  $P = 50\%$  and  $P = 100\%$ .

By adjusting amplitude and phase of the sweep voltage it was possible to obtain nearly linear amplitude modulation.

The maximum frequency deviation was measured with a cavity wave-meter (Figure 5). It turned out to be about  $\pm 1.3$  Mc, corresponding to a percentage variation of  $1.3 \times 10^{-4}$ .

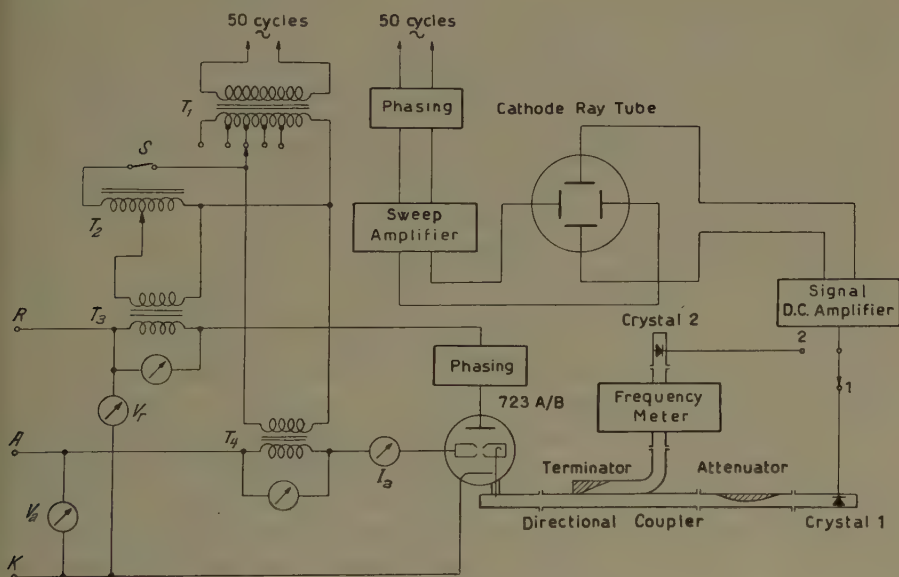


Figure 5  
Circuit for measuring dynamic performance.

4.2.2. As previously stated, in the case of frequency modulation better results are obtained the further the point of operation is moved from the lower vertices of the constant power curves, towards the regions where they are straighter. It is therefore possible to obtain better performance by moving the point of operation into the region above 300 V. The circuit shown in Figure 5 was used to investigate how the tube works in the region above 300 V.

By means of the transformer inserted on the anode circuit, a 50-cycle voltage was superposed to the 300 V anode voltage. The 50-cycle voltage had



a peak value variable up to a maximum of 150 V. For various values of the reflector voltage the crystal-1 response was observed at the oscilloscope. Thus it was possible to ascertain the behaviour of the tube in a broad region which had not been explored with static measurements not to damage the tube.

This investigation has verified the expected regularity of the curves even above the 300 V ordinate.

By utilizing the mode of Figure 4, an anode voltage of 350 V and the left branch of the curve  $P = 45\%$  (not included in the diagram), favourable conditions were found to obtain a sufficiently high and constant power together with very large frequency swing and fair linearity.

In this region it was possible to obtain a 40 Mc sweep with a constant output power  $P = 45\%$  (about 13 mW). By accepting power variations of about 10%, during the modulation period, and a slight loss in modulation linearity, it was possible to increase the bandwidth up to 60 Mc by increasing the modulation voltages applied to the two electrodes.

These large frequency swings can be very useful for measurement purposes, for instance to study the response curve of wide-band filters. Of course, with smaller frequency swings it is possible to obtain a better linearity by utilizing regions where the curve distribution is more uniform.

It would be possible to further extend the useful sweep width by means of a fast acting automatic volume control system. The error voltage obtained from the control circuit could be applied to the reflector electrode in such a manner that the output amplitude remains almost constant during the modulation cycle.

4.2.3. Finally, the expected operating point with optimum stability was observed. To this end, the mode of Figure 4 was used at the point  $V_a = 270$ ,  $V_r = 59$ . In this point a branch of the curve  $P = 35\%$  is parallel to the frequency curve  $\Delta f = 15$ . By means of transformers  $T_3$  and  $T_4$ , two sinusoidal voltages of peak values 10 V and 2.5 V were superimposed to anode voltage and reflector voltage respectively. The change of frequency with respect to the previous value was 0.5 Mc while the output power remained practically unchanged.

#### 4.3. *Validity Limits of the Diagrams*

If the static anode voltage is changed to a higher value, the tube dissipates more energy. It is accordingly heated up and this, as pointed out at paragraph 2, changes the cavity dimensions and hence the frequency. However, if the voltage is modulated at audio frequency there is not enough time for the cavity to heat up and cool down during the audio cycle. Accordingly there is only an electronic frequency change.

Measurements on the 2 K 22-klystron type show a remarkable thermal frequency sensitivity with anode voltage variations. The thermal anode sensitivity

is of the same order or still larger than the reflector sensitivity, and the frequency shift is in the opposite direction than for fast voltage variations.

The behaviour of the 723 A/B tube is much more normal and more predictable from electronic theory, but a small thermal effect will surely be present too.

Therefore it should be kept in mind that from the static measurement of the performance curves one cannot exactly predict dynamic behaviour under audio frequency modulation. For this it would be necessary to measure directly dynamic performance.

Of course these facts do not invalidate the measurements, because for slow changes they are perfectly right and for quick modulation they show at least the general features of the klystron characteristics. It is expected that the dynamic curves would be quite similar to the static ones except that their inclination would be changed.

It is important to notice that, simply by means of the circuit of Figure 5, it is possible to find out, by cut-and-try in various cases, the best conditions of operation. Then, the diagram would only give a first indication, and can be sketched getting only few points on the curves. The exact condition of operation can be found in an easier way by reading the instruments inserted in the supply and modulation circuits.

## 5. Conclusion

By means of diagrams drawn out for the 723 A/B Reflex Klystron tube conditions of operation were found which proved to be of practical value.

By simply relating the anode and reflector voltages, so as to keep the ratio of their variations constant, it was possible to obtain sinusoidal amplitude modulation keeping the frequency practically constant. In a similar way it was possible to obtain frequency modulation keeping constant the output power, with large frequency swings. Finally, always by means of the diagrams, conditions of operation characterized by good stability were found.

The described modulation systems may prove to be of good utility, inasmuch as they give particular results unobtainable with the signal generators available up to date.

## 6. Acknowledgment

The work described in this paper was carried out at the E.T.H. Institut für Hochfrequenztechnik of Zurich, and the writer expresses his gratitude to Prof. TANK for his hospitality and encouragement during the course of the work. Thanks are also due to Dr. NEU, under whose direction the research was made, to Mr. GIGER for his help to establish the limit of the curves validity, and to Prof. BOELLA for his help in writing this account.

*Zusammenfassung*

Durch eine Reihe von Messungen an einem Reflexklystron wird die Abhängigkeit seiner Ausgangsleistung und Frequenz von den angelegten Gleichspannungen untersucht und in Diagrammen dargestellt. An Hand dieser Diagramme wird gezeigt, dass durch gleichzeitige Modulation der Resonatorspannung und der Reflektorspannung entweder reine Amplitudenmodulation oder reine Frequenzmodulation des Klystrons erreicht werden kann. Die wichtigste Anwendung besteht in der Modulation von Signalgeneratoren für Messzwecke.

(Received: July 14, 1953.)

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

**Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen**

Von HANS J. MAEHLY, Zürich<sup>1)</sup>

Durch die Entwicklung schneller Rechenautomaten hat das klassische Problem der iterativen Berechnung der Nullstellen von Polynomen keineswegs an Bedeutung verloren; hingegen haben sich die Maßstäbe zur Beurteilung der in Frage kommenden Näherungsformeln etwas verschoben: Einerseits können viel kompliziertere Formeln in Kauf genommen werden, andererseits aber soll die Konvergenz in jedem Falle gut sein, auch dann, wenn die Koeffizienten oder der Anfangswert vielleicht sehr ungünstig sind. Bekanntlich erfüllt die Newtonsche Formel diese Bedingungen nicht immer, vor allem nicht bei komplexen und bei mehrfachen Nullstellen<sup>2)</sup>. Eine weitere Schwierigkeit entsteht oft durch die Verschleppung von Rundungsfehlern, besonders bei Polynomen hohen Grades, worauf wir am Schluss nochmals zurückkommen.

Gegeben sei also ein Polynom  $n$ -ten Grades:

$$P(x) = \sum_{v=0}^n c_v x^v, \quad (1)$$

gesucht seine Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , für welche

$$P(x) = c_n \prod_{k=1}^n (x - x_k). \quad (2)$$

Dabei können Koeffizienten und Wurzeln komplex sein.

Herleitung und Vergleich verschiedener Näherungsformeln zur Berechnung der  $x_k$  werden erleichtert, wenn wir als Hilfsfunktionen die logarithmischen Ableitungen von  $P$  einführen; wir setzen

$$-\frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d}{dx} \right)^m \log P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_k - x)^m} = s_m \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

<sup>2)</sup> Vergleiche hierzu zum Beispiel: E. F. MOORE, Math. Tables & Aids to Comp. 3, 486 (1949).

Mit

$$a_k = \frac{1}{P} \cdot \frac{d^k P}{dx^k} \quad (4)$$

wird

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -a_1, \\ s_2 &= a_1^2 - a_2, \\ 2s_3 &= -2a_1^3 + 3a_1a_2 - a_3, \\ 6s_4 &= 6a_1^4 - 12a_1^2a_2 + 3a_2^2 + 4a_1a_3 - a_4. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Schliesslich führen wir – für ein fest gewähltes  $x$  – zur Abkürzung ein:

$$(x_k - x)^{-1} = u_k; \quad (6)$$

somit

$$s_m = \sum_{k=1}^n u_k^m. \quad (7)$$

Wir suchen nun Näherungsformeln, die von jedem  $x$  aus möglichst nahe an eine Wurzel heranführen, und zwar am besten an die nächstgelegene. Wegen (6) und (7) bedeutet dies: Aus den ersten  $s_m$  soll eines der  $u_k$ , wenn möglich das absolut grösste, möglichst genau bestimmt werden.

Ist – von  $x$  aus gesehen – eine einzige ( $p$ -fache) Nullstelle viel näher als alle andern, so gilt bei geeigneter Numerierung:

$$u_1 = u_2 = \dots = u_p, \quad |u_1| \gg |u_k| \text{ für } k > p. \quad (8)$$

In erster Näherung ist also:

$$s_1 = p u_1, \quad s_2 = p u_1^2. \quad (9)$$

Mit  $p = 1$  ergibt sich die Newtonsche Formel:

$$(x_1 - x)^{-1} = u_1 = s_1 = \frac{-P'}{P}, \quad (10)$$

allgemeiner bei vorgegebenem  $p$ :

$$u_1 = \frac{s_{1-p+1}}{p} \quad (11)$$

und schliesslich bei unbekanntem  $p$ :

$$u_1 = \frac{s_2}{s_1} \quad (12)$$

Genauere Formeln, welche allerdings die Auflösung einer quadratischen Gleichung erfordern, erhält man, wenn man sich die nächstgelegenen Wurzeln nicht in einem, sondern in zwei verschiedenen Punkten konzentriert denkt. Ist  $x$  eine  $p$ -fache,  $\bar{x}$  eine  $q$ -fache Wurzel, so wird

$$s_m = p u^m + q v^m \quad \text{mit} \quad u = (\bar{x} - x)^{-1}, \quad v = (\bar{x} - x)^{-1}. \quad (13)$$

Sind dabei  $p$  und  $q$  gegeben, so ergibt sich leicht<sup>1)</sup>:

$$u = \frac{p s_1 \pm \sqrt{p q [(p+q) s_2 - s_1^2]}}{p(p+q)}. \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Diese beiden Formeln finden sich schon bei E. SCHRÖDER, Math. Ann. 2, 317 (1870).

<sup>2)</sup> Vgl. E. BODEWIG, Proc. Acad. Sci. Amsterdam 49, 911 (1946), und J. G. VAN DER CORPUT Proc. Acad. Sci. Amsterdam 49, 922 (1946).

Mit  $p = 1$ ,  $q = n - 1$  erhält man die Laguerresche Formel<sup>1)</sup>:

$$u = \frac{1}{n} [s_1 \pm \sqrt{(n-1)(n s_2 - s_1^2)}]. \quad (15)$$

Ist nur die Summe  $s_0 = p + q$  bekannt, nicht aber  $p$  und  $q$  einzeln, so ergibt sich für  $u$  die quadratische Gleichung:

$$u^2 (s_0 s_2 - s_1^2) - u (s_0 s_3 - s_1 s_2) + (s_1 s_3 - s_2^2) = 0. \quad (16)$$

Lässt man auch  $p + q$  frei, so erhält man ganz analog:

$$u^2 (s_1 s_3 - s_2^2) - u (s_1 s_4 - s_2 s_3) + (s_2 s_4 - s_3^2) = 0. \quad (17)$$

Die letzten vier Gleichungen für  $u$  haben jeweils zwei Lösungen; da wir jeweils die nächstgelegene Wurzel suchen, ist das Wurzelvorzeichen stets so zu wählen, dass man das absolut grössere  $u$  erhält.

Aus unserer obigen Herleitung ergibt sich, dass die Laguerresche Formel auch zur Berechnung komplexer Nullstellen geeignet ist. Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten hat sie den grossen Vorzug, die reelle Achse von selbst, aber erst dann zu verlassen, wenn der Einfluss eines komplexen Wurzelpaars überwiegt. Die Folge sukzessiver Näherungen konvergiert bei Verwendung der Laguerreschen Formel (auch im Komplexen) kubisch gegen einfache, aber nur linear gegen mehrfache Wurzeln<sup>2)</sup>. Analog führt Gleichung (14) nur für genau  $p$ -fache Wurzeln zu kubischer Konvergenz. Dagegen ist die Konvergenz mit (16) stets kubisch, mit (17) sogar immer von vierter Ordnung, ohne dass die eventuelle Vielfachheit der Wurzel bekannt zu sein braucht. Nach unserer Herleitung ist zu vermuten, dass (17) noch etwas bessere Konvergenz ergibt als (16), und in den wenigen bisher gerechneten Beispielen hat sich dies bestätigt. Ob und wann sich aber der erhebliche Mehraufwand für die Berechnung von  $s_4$  lohnt, kann hier noch nicht entschieden werden.

Nach Bestimmung einer Nullstelle  $x_k$  pflegt man das Polynom  $P(x)$  durch  $(x - x_k)$  zu dividieren, einerseits um den Grad des Polynoms zu erniedrigen, also die folgende Rechnung zu vereinfachen, andererseits um eine nochmalige Berechnung von  $x_k$  zu verhindern. Dies führt aber oft zu gefährlichen Rundungsfehlern. Bei schnellen Maschinen, wo die Ersparnis an Rechenaufwand weniger ins Gewicht fällt, ist daher eher folgendes Verfahren zu empfehlen:

Kennt man Näherungen  $x_1, \dots, x_l$  für  $l$  Nullstellen  $x_1, \dots, x_l$  und sucht man die restlichen Wurzeln  $x_{l+1}, \dots, x_n$ , so ersetze man alle  $s_m$  durch

$$s'_m = s_m - \sum_{k=1}^l (\bar{x}_k - x)^{-m}. \quad (18)$$

Im Gegensatz zum üblichen Divisionsverfahren haben dann die Ungenauigkeiten  $x_k - x_k$  praktisch keinen Einfluss auf die iterierten Werte und gar keinen auf deren Grenzwerte, solange  $|x - x_k| \gg |\bar{x}_k - x_k|$ . Ist diese letztere Bedingung nicht erfüllt, so kann die Folge allerdings gegen ein  $x_k$  oder eventuell gegen ein  $x_k$  mit  $k < l$  konvergieren.

Theoretische Untersuchungen über die hier vorgeschlagenen Iterationsformeln sowie numerische Versuche sind im Gange, und eine ausführliche Arbeit hierüber ist vorgesehen.

<sup>1)</sup> E. N. LAGUERRE, Nouv. Ann. Math. [2<sup>e</sup> s.] 19 (1880), oder Œuvres de Laguerre, Bd. I, S. 87 bis 103.

<sup>2)</sup> Vgl. E. BODEWIG und J. G. VAN DER CORPUT, a. a. O.



### Summary

The slow convergence of NEWTON's method for the iterative approximation of the roots of an algebraic equation may be improved by using a formula due to LAGUERRE. It is shown that this formula together with certain generalizations are useful for the numerical calculation of both real and complex zeros. A method is also given for the calculation of a further root of an equation after several roots have already been found, such that errors on the determination of the previous roots will not affect the accuracy with which the present one may be approximated.

(Eingegangen: 21. Januar 1954.)

## Aerodynamische Kräfte auf schlanke Rotationskörper<sup>1)</sup>

VON HANS R. VOELLMY, Zürich<sup>2)</sup>

Zur Berechnung der Kräfte auf schlanke drehsymmetrische Körper, insbesondere zur Bestimmung der Querkraft, steht heute eine recht umfangreiche Literatur zur Verfügung. Seltener aber findet man Veröffentlichungen über Messergebnisse und Vergleiche mit theoretischen Berechnungen.

Im Verlaufe vieler routinemässig durchgeführter Windkanalmessungen wurde der Verfasser auf beträchtliche Differenzen der erhaltenen Messresultate mit den vorliegenden potentialtheoretischen Berechnungen aufmerksam. Eine spezielle Versuchsserie, welche im Institut für Aerodynamik der ETH. unter Leitung von Herrn Prof. Dr. J. ACKERET durchgeführt wurde, sollte den Anwendungsbereich besonders der einfachen Theorien aufzeigen.

### 1. Elementare Theorie

Die Normalkraft  $N$ , welche auf einen zur Strömungsrichtung mit dem kleinen Winkel  $\alpha$  angestellten schlanken Rotationskörper wirkt, wurde seinerzeit schon von MUNK [1]<sup>3)</sup> angegeben und seither von JONES [2] und ACKERET [3] wieder aufgenommen. Die hier getrennte Betrachtung von benachbarten Schnittebenen senkrecht zur Rotationsachse stellt eine noch stärkere Vereinfachung der tatsächlichen Strömungsvorgänge dar, als dies mittels der Linearisierung der räumlichen Potentialströmung nach den Methoden von VON KÁRMÁN und MOORE [4], FERRARI [5] und TSIEN [6] möglich ist. Dabei zeigt sich, dass nach dieser *Querschnittstheorie* die Normalkraftverteilung unabhängig von der Mach-Zahl wird und nur von der Änderung des Querschnittes  $F$  mit der Länge  $x$  des Körpers abhängt:

$$\frac{dN}{dx} \sim \frac{dF}{dx}.$$

Wird über die Länge des Körpers integriert, so erhält man das erstaunlich einfache Resultat, dass die Normalkraft zur Bodenfläche  $F_h$  proportional ist:

$$N = \sin 2\alpha \cdot \frac{q}{2} V^2 F_h.$$

<sup>1)</sup> Vorgetragen am Astronautischen Kongress 1953 in Zürich, zufolge Abwesenheit des Verfassers durch Herrn B. CHAIX, Institut für Aerodynamik der ETH.

<sup>2)</sup> Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon, Bührle & Cie., und Institut für Aerodynamik der ETH.

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 269.

Ebenso ergibt sich für das Längsmoment  $H$  eine physikalisch anschauliche Grösse:

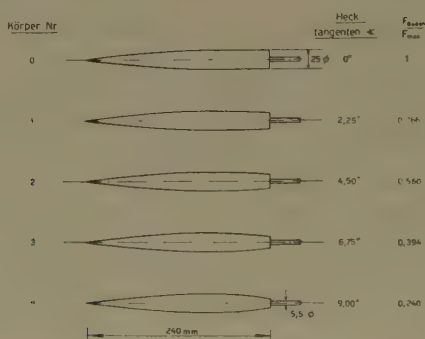
$$M = \sin 2\alpha \cdot \frac{\rho}{2} V^2 (G - F_h s),$$

indem  $G$  das Volumen des Körpers und  $s$  den Abstand des Momentenbezugs-punktes von der Bodenfläche bedeuten.

Die Versuche haben die Gültigkeit dieser einfachen Formeln für *kleine Anstellwinkel* und Körper mit *schwach konvergierendem Heckteil* bewiesen.

## 2. Modelle und Messeinrichtung

Um den Einfluss der Grösse der Bodenfläche auf die Normalkraft zu untersuchen, wurden fünf Versuchskörper im hinteren Drittel der Länge verschieden stark verjüngt (Figur 1).



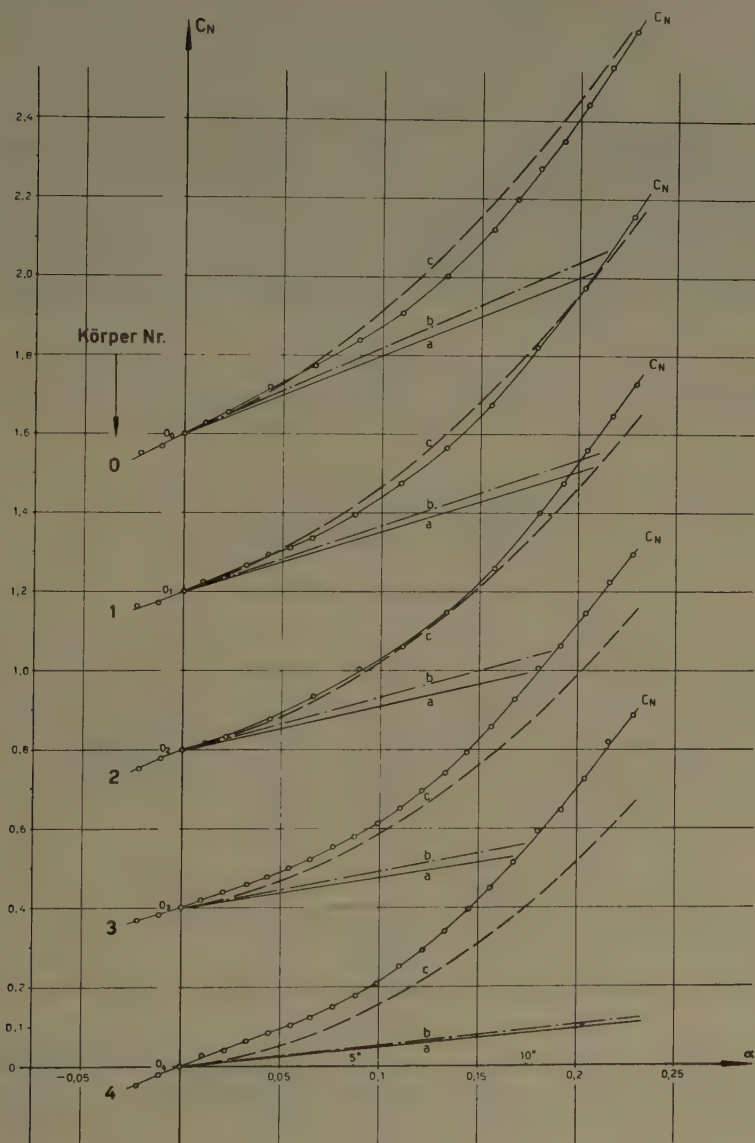
Figur 1

Meridianschnitt der fünf Versuchskörper mit verschieden grossen Bodenflächen. Die elektrische Drei-Komponenten-Waage sitzt im Innern des Modells.

Die Messung der Kräfte geschieht mittels einer *im Modell eingebauten elektrischen Waage* (strainage), welche auf einer Stütze von veränderlichem Anstellwinkel sitzt. An einer Philips-Messbrücke werden die Resultate abgelesen und in einem von der Firma Contraves AG., Zürich, entwickelten elektronischen Analogierechner [7] ausgewertet.

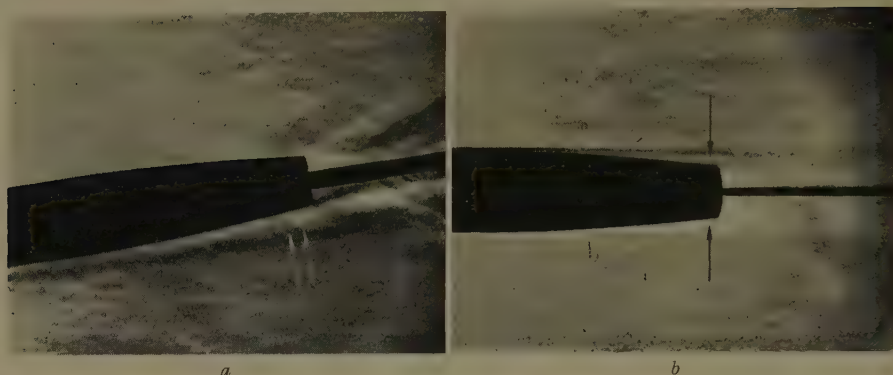
## 3. Messergebnisse bei grossen Anstellwinkeln

Wie Figur 2 deutlich zeigt, übersteigt die gemessene Normalkraft stark die aus der elementaren Theorie (Kurve *a*) oder auch aus der linearisierten Potentialtheorie (Kurve *b*) berechneten Werte bei grossen Anstellwinkeln. Das *quadratische Verhalten der Normalkraft* über dem Anstellwinkel kann nur durch die Betrachtung der Einflüsse der Zähigkeit der Luft auf die Strömungsvorgänge erklärt werden, worauf Betz [8] erstmals hingewiesen hat. Ähnlich der Queranströmung eines Zylinders entsteht durch die Queranströmung des Rotationskörpers auf der Abströmseite, im Querschnitt betrachtet, *ein Wirbelpaar*. Die gleichzeitige Längsanströmung verhindert aber die Ausbildung einer Kármánschen Wirbelstrasse, indem die Wirbel in der dritten Dimension wegschwimmen können. In den beiden



Figur 2

Vergleich der gemessenen Normalkraftbeiwerte  $C_N$  für die fünf Körper bei  $M = 1,38$ ,  $Re_L = 1,2 \cdot 10^6$  mit: a Elementartheorie von MUNK (Q-Theorie); b linearisierter Theorie; c Elementartheorie und nichtpotentieller Normalkraft.



Figur 3

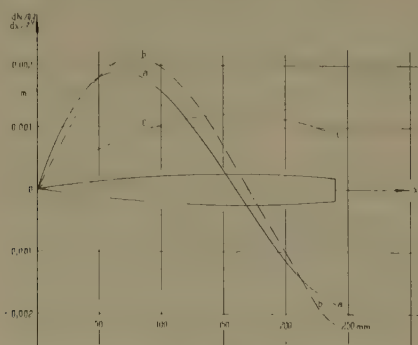
Schlierenaufnahme der Wirbelzöpfe auf der Abströmseite des Körpers (Pfeile), eine Folge der durch die Potentialtheorie nicht erfassten Zähigkeit der Luft. Körper Nr. 3,  $M = 1,66$ ,  $Re_L = 1,2 \cdot 10^6$ ,  $\alpha = 10^\circ$ . *a*  $10^\circ$ -Anstellwinkel in der Bildebene; *b*  $10^\circ$ -Anstellwinkel senkrecht zur Bildebene.

in zwei Projektionen aufgenommenen Schlierenbildern zeichnen sich diese Wirbelzöpfe als starke Helligkeitsveränderungen deutlich ab (Figur 3).

Die durch die Wirbel hervorgerufene Querkraft pro Einheitslänge in Achsrichtung ist:

$$\frac{dW}{dx} = C_w \frac{\rho}{2} (V \sin \alpha)^2 D \sim \alpha^2.$$

Mit dem konstanten Widerstandskoeffizienten  $C_w = 1,2$  (unterkritisch angeblasener Kreiszyylinder) berechnet, ergibt sich der in Figur 4, Kurve *c*, abgebildete, zum Durchmesser  $D$  jedes Querschnittes proportionale Verlauf der Normalkraft. Die resultierende Kraft wird also durch den Schwerpunkt der Meridianfläche gehen. Da dieser Schwerpunkt im allgemeinen nahe beim Massenschwerpunkt des Körpers liegt, wird das *Drehmoment*, welches die Stabilität des Körpers beeinflusst, durch die nichtpotentiellen Kräfte kaum verändert.



Figur 4

Normalkraftverteilung entlang der Körperachse für Körper Nr. 2 bei  $\sin \alpha = 0,2$ , nach: *a* Querschnittstheorie; *b* linearisierter Theorie,  $M = 1,38$ ; *c* nichtpotentieller Normalkraft aus Querschnittswiderstand infolge Wirbelbildung,  $C_{w, quer} = 1,2$ .

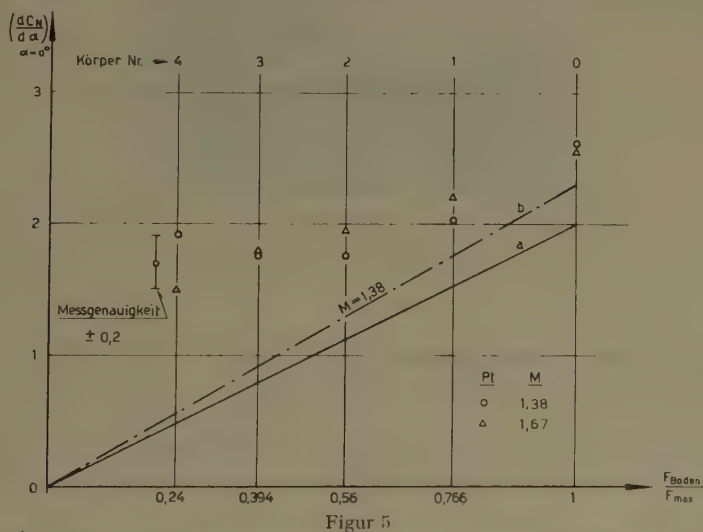
Aus diesem Grund ist die Abschätzung der Längsstabilität eines schlanken Geschosses mittels der linearisierten Potentialtheorie (Kurve *b*) oder sogar mittels der einfachen Querschnittstheorie (Kurve *a*) erstaunlich genau.

Der Vergleich der von den Kurven eingeschlossenen Flächen hingegen zeigt den starken Einfluss der durch die Zähigkeit hervorgerufenen *Normalkräfte*, welche die von der Potentialtheorie erfassten Kräfte übersteigen können.

Nach ALLEN [9], VAN DYKE [14] und FLAX und LAWRENCE [11] addiert man die nichtpotentielle zur potentiellen Normalkraft und erhält so die Kurven *c* in Figur 2, welche nun das quadratische Verhalten der experimentellen Kurven besser wiedergeben.

#### 4. Messergebnisse bei kleinen Anstellwinkeln

Bei kleinen Anstellwinkeln möchte man erwarten, dass die potentialtheoretisch berechneten Normalkräfte gut mit den Messungen übereinstimmen, da das in  $\alpha$  quadratische Glied seine Wirkung verliert. Schon ein Blick auf Figur 2 belehrt aber, dass besonders bei den sich *stark verjüngenden Körpern* die *Tangentenneigungen* der Normalkraftkurven im Anstellwinkel-Nullpunkt wenig mit den



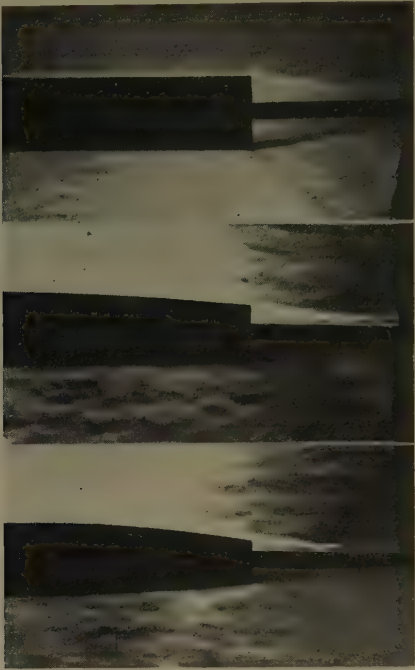
Figur 5

Vergleich der gemessenen Querkraftgradienten  $dC_N/d\alpha$  bei  $\alpha = 0^\circ$  mit: *a* Q-Theorie; *b* linearisierter Theorie.

Neigungen der theoretischen Kurven übereinstimmen. In Figur 5 sind diese Normalkraftgradienten über der Bodenfläche aufgetragen, um die Abweichung der Messungen gegenüber der durch eine Gerade dargestellten Querschnittstheorie (Kurve *a*) oder der linearisierten Theorie (Kurve *b*) besser überblicken zu können.

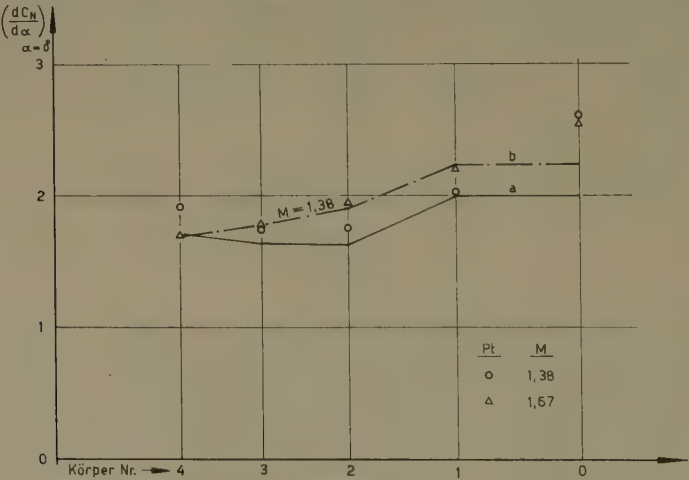
Die Verdrängungsdicke der Grenzschicht wird gegen das Körperende hin um so grösser, je stärker sich der Körper nach hinten verjüngt. Dies zeigt Figur 6 deutlich, wo die Grenzschicht als weisser Streifen auf der oberen Seite der Körper deutlich sichtbar ist. Die Berechnung der Druckverteilung entlang der verschiedenen Körper zeigt das starke Anwachsen des Druckes gegen das Körperende hin,





Figur 6

Wachsende Grenzschichtdicke bei zunehmender Konvergenz des Heckteils. Schlierenaufnahmen der Körper Nr. 0, 2 und 4 bei  $M = 1,38$ ,  $Re_L = 1,2 \cdot 10^6$ ,  $\alpha = 0^\circ$ .



Figur 7

Vergleich der gemessenen Querkraftgradienten mit den bis zum Punkt minimalen Druckes integrierten Querkraften nach: a Q-Theorie; b linearisierter Theorie.

woraus mit der rein geometrischen Verkleinerung des Körperrumfanges zusammen das starke Anwachsen der Grenzschicht hervorgeht.

In ganz schematischer Weise wird nun angenommen, dass die Strömung ausserhalb der Grenzschicht vom Querschnitt des tiefsten Druckes an infolge der stark anwachsenden Grenzschichtdicke nicht weiter gegen die Achse konvergiere. An Stelle der Bodenfläche werde also der *Querschnitt minimalen Druckes* in die Rechnung gesetzt. Figur 7 zeigt, dass nach dieser einfachen *Hypothese* die experimentellen Werte bedeutend besser erreicht werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass es wichtiger ist, die Einflüsse der *Zähigkeit der Luft* bei der Berechnung der Kräfte auf schlanke Rotationskörper abzuschätzen, als die potentialtheoretischen Rechenmethoden weiter zu verfeinern.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. M. MUNK, Nat. Advis. Comm. Aeron. Rep. No. 184 (1924).
- [2] R. T. JONES, Nat. Advis. Comm. Aeron. T. N. No. 1032 (1946).
- [3] J. ACKERET, Helv. phys. Acta 22, 127–134 (1949).
- [4] TH. VON KÁRMÁN und N. MOORE, Trans. Amer. Soc. mech. Eng. 54, 303–310 (1932).
- [5] C. FERRARI, Aerotechnica 17, 507–518 (1937).
- [6] H. S. TSIEN, J. aeron. Sci. 5, 480–483 (1938).
- [7] H. R. VOELLMY, ZAMP 3, 394–395 (1952).
- [8] A. BETZ, *Aerodynamic Theory* (W. F. Durand, Berlin 1934–36), Bd. 4, S. 69–72.
- [9] H. J. ALLEN, Nat. Advis. Comm. Aeron. T. N. 2044 (1950).
- [10] M. D. VAN DYKE, J. aeron. Sci. 18, 161–178 (1951).
- [11] A. H. FLAX und H. R. LAWRENCE, Proc. 3rd Anglo-American. Aeron. Conf. 1951, 363–398.

### Summary

Comparison between measurements of the normal force of five *slender* bodies of revolution with different base areas in supersonic flow and the simple airship-hull theory of MUNK or the more accurate linearised theory of *potential flow* show considerable discrepancy not only at large, but also at small angles of attack.

To get better agreement with the experimental results, it is shown to be more important to estimate the *effects of viscosity* than to consider higher orders of potential flow theory.

(Eingegangen: 5. Februar 1954.)

## Abklingen eines schwachen Dralls in der Längsströmung zwischen koaxialen Kreiszylindern

Von HERMANN WUNDT, Freiburg i. Br.<sup>1)</sup>

L. COLLATZ und H. GÖRTLER haben neuerdings<sup>2)</sup> die laminare Strömung mit schwachem Drall durch ein ruhendes gerades Kreisrohr rechnerisch behandelt. Nach Linearisierung der Bewegungsgleichungen bezüglich der Drallstörungsgrösse wird man auf ein Eigenwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt. Die Grössenordnung der Eigenwerte gibt dabei Aufschluss über das Abklingen des anfänglichen Dralls in Stromrichtung.

Diese Betrachtungen sollen hier auf eine Längsströmung zwischen koaxialen Kreiszylindern verallgemeinert werden. Den Drall mag man sich dabei etwa durch ein im ruhenden Rohr angebrachtes geeignetes Leitwerk erzeugt denken; der innere Zylinder kann als feste Nabe ausgebildet sein. In den technisch interessierenden Fällen wird diese Strömung freilich selten laminar sein. Die das Abklingen des Dralls messenden Eigenwerte werden von der Weite des ringförmigen Spalts abhängig sein; man erwartet für enge Spalte ein rascheres Abklingen, das heisst absolut grössere Eigenwerte.

Wegen der Herleitung des Eigenwertproblems sei auf die genannte Arbeit von COLLATZ und GÖRTLER verwiesen (fortan zitiert als [1]). Mit den dortigen Bezeichnungen seien  $q = x/r_0 Re^3$  die axiale,  $s = r/r_0$  die radiale dimensionslose Koordinate des der Strömung angepassten Zylinderkoordinatensystems.  $s = b$  sei der Radius des inneren Zylinders,  $s = 1$  der Radius des äusseren Zylinders, so dass  $b$  das Radienverhältnis bedeutet. Betrachtet werden Fälle von  $b = 0$  (kein innerer Zylinder) bis  $b = 1$  (Rohr verstopft). Das  $s$ -Intervall ist  $b \leq s \leq 1$ .

$u(s)$  sei die Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in  $q$ -Richtung, während  $w(q, s)$  die tangentielle Geschwindigkeitskomponente, also den Drall, bezeichne. Für diesen Drall wird der Separationsansatz

$$w(q, s) = e^{-\lambda q} G(s)$$

gemacht, welcher auf das untenstehende Eigenwertproblem (1) für die Funktion  $G(s)$  führt. Der Separationsparameter  $\lambda$  tritt als Eigenwertparameter in die Gleichung für  $G(s)$  ein. Er ist gegenüber [1] mit umgekehrtem Vorzeichen definiert, da dann positive Eigenwerte zu erwarten sind.

Damit lautet das gleich in selbstadjungierter Form geschriebene Eigenwertproblem:

$$L[G] = -(sG')' + \frac{1}{s} G = \lambda s f(s) G \quad (1)$$

mit den aus der Haftbedingung am inneren und am äusseren Zylinder herrührenden Randwerten  $G(b) = G(1) = 0$ .

Der wesentliche Unterschied zum in [1] aufgestellten Eigenwertproblem besteht in der veränderten Funktion  $f(s)$ , die die axiale Geschwindigkeitsverteilung

<sup>1)</sup> Mathematisches Institut der Universität, Abteilung Angewandte Mathematik.

<sup>2)</sup> L. COLLATZ und H. GÖRTLER, *Rohrströmung mit schwachem Drall*, ZAMP 5, 95 (1954).

<sup>3)</sup> Über die Definition der hier verwendeten Reynoldsschen Zahl  $Re$  siehe unten nach Formel (3).

in weitem Abstand vom Einlauf darstellt. Ohne inneren Zylinder ( $b = 0$ ) war diese

$$\frac{u^*(s)}{U_0} = f^*(s) = 1 - s^2,$$

die bekannte Poiseuille-Strömung ( $U_0$  die Maximalgeschwindigkeit in der Rohrachse), jetzt hingegen, nach Hinzutreten der weiteren Randbedingung  $u(b) = 0$ , lautet sie

$$\frac{u(s)}{U_0} = f(s) = 1 - s^2 - A \ln s \quad (2)$$

mit der vom Radienverhältnis  $b$  abhängigen Konstanten

$$A(b) = \frac{1 - b^2}{\ln b}. \quad (3)$$

Wir wollen hierbei für alle Spaltweiten  $b$  stets dasselbe konstante Druckgefälle  $-\frac{dp}{dx}$  zugrunde legen. Damit lässt sich eine von  $b$  unabhängige Bezugsgeschwindigkeit

$$U_0 = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r_0^2}{4\mu}$$

( $\mu$  ist die konstante Zähigkeit) definieren; sie ist mit der bei [1] im Falle  $b = 0$  verwendeten Bezugsgeschwindigkeit identisch. Die so zu bildende Reynoldssche Zahl

$$Re = \frac{U_0 r_0 \varrho}{\mu} = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r_0^3 \varrho}{4\mu^2}$$

ist gleichfalls von  $b$  unabhängig.

$f(s)$  ist eine exakte Lösung der vollen Navier-Stokesschen Gleichungen. Die zu berechnenden Eigenwerte  $\lambda_i$  werden nun natürlich von  $b$  abhängen:  $\lambda_i = \lambda_i(b)$ , und gerade diese Abhängigkeit (etwa bei unverändertem Druckgefälle) besitzt als Verallgemeinerung gegenüber [1] das Hauptinteresse.

Die Theorie der Eigenwertaufgabe (Existenz von Eigenwerten und Eigenfunktionen, Entwicklungssatz) ist fast wörtlich aus [1] übertragbar. Erhöhte Vorsicht fordert lediglich der Umstand, dass  $f(s)$  nunmehr an *beiden* Rändern verschwindet. An die nach Eigenfunktionen  $G_i$  entwickelbaren Funktionen  $h(s)$  muss daher ausser den in [1] genannten Bedingungen noch die Forderung  $L[h(s)]_{s=b} = 0$  gestellt werden (für  $s = 0$  war dies von selbst sichergestellt), damit

$$h^*(s) = \frac{L[h(s)]}{\sqrt{s} f(s)}$$

im Intervall  $(b, 1)$  quadratisch integrierbar ist. Alle übrigen Aussagen bleiben erhalten; insbesondere sind die Eigenwerte  $\lambda_i$  sämtlich positiv.

Während demnach die Theorie der erweiterten Aufgabe nur eine geringfügige Verschärfung der Voraussetzungen notwendig macht, stellen sich der numerischen Berechnung der Eigenwerte und -funktionen beträchtliche Hindernisse in den Weg.

Um über die Abhängigkeit der  $\lambda_i$  von  $b$  und über ihre Grössenordnung Anhaltspunkte zu gewinnen, wird zunächst ein Vergleichsproblem herangezogen. Wir ersetzen  $f(s)$  durch  $g(s) \equiv 1$ . Dann gilt  $g(s) \geq f(s)$  überall im Intervall  $(b, 1)$ . Das Vergleichsproblem lautet in selbstadjungierter Form

$$-(s \bar{G}')' + \frac{1}{s} \bar{G} = \kappa s \bar{G}, \quad G(b) = \bar{G}(1) = 0. \quad (4)$$

Die allgemeine Lösung hiervon ist  $Z_1(\sqrt{\kappa} s)$ , eine Zylinderfunktion erster Ordnung, die den Forderungen  $Z_1(b \sqrt{\kappa}) = Z_1(\sqrt{\kappa}) = 0$  zu genügen hat. Da für die Eigenfunktionen ein Faktor frei bleiben kann, so lautet diese Forderung:

$$J_1(\sqrt{\kappa}) + A_b N_1(\sqrt{\kappa}) = 0 \quad \text{und} \quad J_1(b \sqrt{\kappa}) + A_b N_1(b \sqrt{\kappa}) = 0. \quad (5)$$

Zwecks Eliminierung von  $A_b$  multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $N_1(b \sqrt{\kappa})$ , die zweite mit  $N_1(\sqrt{\kappa})$ , und subtrahieren sie von der ersten. Dann folgt

$$J_1(\sqrt{\kappa}) N_1(b \sqrt{\kappa}) - J_1(b \sqrt{\kappa}) N_1(\sqrt{\kappa}) = 0, \quad (6)$$

eine viel untersuchte transzendente Gleichung. Man findet ihre Wurzeln für verschiedene Werte von  $b$ , etwa bei JAHNKE-EMDE<sup>1)</sup>.

Mit diesen Werten ergibt sich die folgende Tabelle der Eigenwerte  $\kappa_i$  in Abhängigkeit von  $b$ :

$b$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$	$\kappa_4$	$\kappa_5$	$\kappa_6$
0	14,682	49,219	103,50	177,52	271,28	384,78
1/2	40,883	159,386	359,27	633,15	988,46	1422,72
2/3	89,927	356,424	800,56	1422,35	2221,79	3198,88
5/6	356,198	1422,127	3198,65	5685,79	8883,55	12791,90
1	Für $b \rightarrow 1$ wachsen die $\kappa_i$ über alle Grenzen.					

Wegen  $g(s) \geq f(s)$  gilt nun  $\kappa_i \leq \lambda_i$ . Wir haben damit (grobe) untere Schranken für die  $\lambda_i(b)$ . Dass sie sehr grob sind, sieht man schon aus dem Vergleich der Zeile  $b = 0$  mit den bei [1] berechneten Werten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Aus der Theorie der Gleichung (6) folgt, dass die  $\kappa_i(b)$  in  $0 \leq b \leq 1$  monoton von einem Anfangswert nach  $+\infty$  steigende Funktionen sind. Dasselbe gilt auch für die  $\lambda_i(b)$ , wie in Fussnote 1, S. 274, gezeigt werden wird. Das heisst: je enger der Spalt zwischen den koaxialen Zylindern ist, desto rascher klingt der Drall stromabwärts ab; für  $b = 1$  (Spalt zu) kann natürlich nichts mehr fließen.

Zur eigentlichen Berechnung der Eigenwerte bieten sich im wesentlichen vier Wege:

1. Differenzenverfahren mit Versuchseigenwerten, die so lange systematisch variiert werden, bis der zweite Randwert mit gewünschter Genauigkeit erreicht ist; Eigenfunktion und Eigenwert sind dann richtig getroffen;
2. numerische Integration (etwa Runge-Kutta-Methode) mit demselben Probierverfahren für die Eigenwerte;
3. Reihenentwicklungen um den einen Randpunkt;
4. Verfahren der schrittweisen Näherungen.

Die Methoden 1 und 2, die man im allgemeinen nur zur Berechnung der Eigenfunktionen, selten zur Bestimmung der Eigenwerte anwendet, scheiden aus, da das Problem noch den Parameter  $b$  enthält. Man müsste für jeden Parameterwert  $b$  alle Rechnungen gesondert durchführen, was einen unangemessenen Arbeitsaufwand bedeuten würde.

Methode 3, die sich für den Fall  $b = 0$  sehr bewährt, versagt auch, weil die Funktion  $f(s)$  nun einen Logarithmus enthält. Die übersichtliche Rekursions-

<sup>1)</sup> E. JAHNKE und F. EMDE, *Tafeln höherer Funktionen*, 4. Aufl. (Teubner, Leipzig 1948), S. 204.



formel für die Koeffizienten der Potenzreihe

$$G(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} s^{\nu+1}$$

geht verloren, weil man mit der Logarithmusreihe auszumultiplizieren hat. Zudem ist der günstige Entwicklungspunkt  $s = 0$  nach ausserhalb des Intervalls gerückt.

Es bleibt daher nur Methode 4, das Verfahren der schrittweisen Näherungen, welches bekanntlich leider nur den ersten Eigenwert mit erträglichem Aufwand liefert. Gerade der kleinste Eigenwert  $\lambda_1$  ist jedoch in erster Linie interessant, da er hinreichend weit stromabwärts allein noch die Drallverteilung bestimmt. (Dennoch kann man sich über die Grössenordnung des zweiten Eigenwertes ein Bild machen; siehe unten).

Zum Vergleich mit [1] wird der Rechengang grob skizziert: Um nicht für jede Wahl von  $b$  getrennte Rechnungen durchführen zu müssen, wird von einer stetigen Funktion  $F_0$  ausgegangen, die die Randbedingungen erfüllt und den Parameter  $b$  explizit enthält. Dieser Parameter wird durch alle Operationen ohne Spezialisierung mitgeschleppt. Da der Logarithmus im Verlauf der Rechnung ohnedies auftritt [wegen  $f(s)$ ], bietet sich natürlich  $f(s)$  selbst als erste Vergleichsfunktion  $F_0$  an; es erfüllt beide Randbedingungen.

Bezeichnet man  $N[F]$  die rechte Seite des Eigenwertproblems (1), so berechnet man weitere Vergleichsfunktionen  $F_1, F_2, \dots$  aus den Randwertproblemen

$$L[F_{\nu+1}] = N[F_{\nu}].$$

Man erhält so

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= 1 - s^2 - A \ln s, \\ F_1 &= -\frac{1}{35} s^6 + \frac{2}{15} s^4 - \frac{1}{3} s^2 + A^2 s^2 \left( -\frac{1}{3} \ln^2 s + \frac{8}{9} \ln s - \frac{26}{27} \right) \\ &\quad + A \left[ s^4 \left( -\frac{4}{15} \ln s + \frac{16}{225} \right) + s^2 \left( \frac{2}{3} \ln s - \frac{8}{9} \right) \right] + C_1 s + C_2 \frac{1}{s} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{1-b^2} \left[ \frac{26}{27} A^2 (1-b^3) + \frac{184}{225} A (1-b^5) + \frac{8}{35} (1-b^7) \right], \\ C_2 &= -\frac{b^2}{1-b^2} \left[ \frac{26}{27} A^2 (1-b) + \frac{184}{225} A (1-b^3) + \frac{8}{35} (1-b^5) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die Formel für die Funktion  $F_2$  würde bereits eine sehr beträchtliche Länge annehmen.

Daraus werden die Schwarzschen Konstanten

$$a_0 = \int_b^1 s f(s) F_0^2(s) ds; \quad a_1 = \int_b^1 s f(s) F_0(s) F_1(s) ds; \quad a_2 = \int_b^1 s f(s) F_1^2(s) ds \quad (9)$$

und die Schwarzschen Quotienten  $\mu_1 = a_0/a_1$  und  $\mu_2 = a_1/a_2$  berechnet. Sowohl die Schwarzschen Konstanten als auch die Quotienten enthalten den Parameter  $b$ , der im Integranden und in der unteren Integralgrenze steckt. Nun schrumpft für  $b \rightarrow 1$  nicht nur die Intervalllänge auf 0 zusammen, sondern auch der Betrag

des Integranden wird rasch klein. Daher gehen die  $a_i$  für  $b \rightarrow 1$  sehr stark gegen 0. Die  $\mu_i$ , deren Folge von oben gegen den ersten Eigenwert  $\lambda_1$  konvergiert, nähern sich dadurch für wachsendes  $b$  immer mehr der Form  $0/0$ , worunter die erzielbare Rechengenauigkeit stark leidet.

Um mit Hilfe von  $\mu_1(b)$  und  $\mu_2(b)$  schliesslich  $\lambda_1(b)$  in Grenzen einschliessen zu können, benötigt man noch eine untere Schranke  $\lambda_2(b)$  von  $\lambda_1(b)$ . Unter der durch Überschlagsrechnungen kontrollierbaren Annahme, dass  $\lambda_2(b)$  für wachsendes  $b$  jedenfalls nicht schwächer wächst als  $\lambda_1(b)$ , bildet

$$l_2(b) = \frac{\lambda_2(0)}{\lambda_1(0)} \lambda_1(b)$$

eine verwendbare, wenn auch vielleicht noch sehr grobe untere Schranke für  $\lambda_2$ . Die Schranken aus dem Vergleichsproblem von oben genügen nicht, da sie die Forderung  $l_2 > \mu_2$  nicht erfüllen, das heisst viel zu schlecht sind. Die sogenannte Hauptformel

$$\mu_2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{(l_2/\mu_2) - 1} \leq \lambda_1 \leq \mu_2 \quad (10)$$

liefert sodann die in der Tabelle wiedergegebenen Werte für  $\lambda_1(b)$ <sup>1</sup>.

Zu Vergleichszwecken werden hier auch noch folgende Grössen mit angegeben:

1. Die Strecke, auf der der Drall zu einem vorgebbaren Bruchteil seines anfänglichen Betrages abgeklungen ist, im Verhältnis zu der Strecke, auf der das Abklingen zum selben Bruchteil ohne inneren Zylinder erfolgt. Dieses Verhältnis  $d(b)$  veranschaulicht also, um wieviel schneller das Abklingen des Dralls bei abnehmender Spaltweite erfolgt<sup>2</sup>).

$$d(b) = \frac{\lambda_1(0)}{\lambda_1(b)}.$$

2. Die Durchflussmenge  $Q(b)$  im Verhältnis zur Durchflussmenge  $Q(0)$  bei Fehlen des inneren Zylinders.

$$Q(b) = \frac{\pi}{2} r_0^2 U_0 \left( 1 - b^4 + \frac{(1 - b^2)^2}{\ln b} \right).$$

3. Die noch erreichte Maximalgeschwindigkeit  $u_{max}(b)$  im Verhältnis zur Maximalgeschwindigkeit  $u_{max}(0) = U_0$  ohne inneren Zylinder.

$$\frac{u_{max}(b)}{U_0} = 1 + A \left( \frac{1}{2} - \ln \sqrt{\frac{-A}{2}} \right).$$

4. Die Abszisse  $s_U(b)$ , auf der die Maximalgeschwindigkeit  $u_{max}(b)$  angenommen wird.

$$s_U(b) = \sqrt{\frac{-A}{2}}.$$

5. Die Abszisse  $s_D(b)$ , auf der das Maximum der asymptotischen Drallverteilung  $G_{1,max}(b)$  liegt [der graphischen Darstellung der ersten Eigenfunktion  $G_1(s)$  für die verschiedenen  $b$  entnommen].

<sup>1</sup>) Die  $\mu_i$  sind im offenen Intervall  $\langle 0, 1 \rangle$  stetige, stetig differenzierbare und – wie sich nachrechnen lässt – monoton wachsende Funktionen von  $b$ . Ihre Folge konvergiert daher in  $\langle 0, 1 \rangle$  auch gleichmässig gegen  $\lambda_1(b)$ , das demnach gleichfalls monoton wächst.

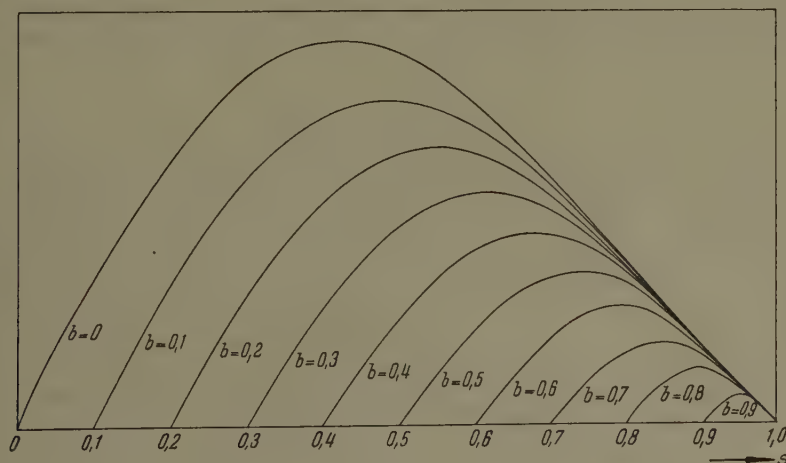
<sup>2</sup>) Die Werte gelten nur asymptotisch für grosse  $q$ , da der Einfluss der höheren Eigenwerte nicht berücksichtigt ist.

Es sei betont, dass alle diese Werte auf der Voraussetzung gleichbleibenden Druckgefälles, das heisst von konstantem  $U_0$  bzw.  $Re$  fussen.

$b$	$\lambda_1(b)$	$d(b) = \frac{\lambda_1(0)}{\lambda_1(b)}$ %	$\frac{Q(b)}{Q(0)}$ %	$\frac{u_{max}(b)}{U_0}$ %	$s_U(b) = \sqrt{\frac{-A(b)}{2}}$	$s_D(b)$
0	+ 21,382 302	100	100	100	0	0,42
0,1	+ 39,6	54,0	57,4	45,4	0,463 64	0,49
0,2	+ 60,5	35,3	42,6	34,1	0,546 11	0,55
0,3	+ 99,9	21,4	30,4	25,5	0,614 74	0,61
0,4	+ 181	11,8	20,4	18,4	0,677 03	0,68
0,5	+ 397	5,4	12,6	12,7	0,735 53	0,74
0,6	+ 896	2,4	6,9	8,0	0,791 47	0,79
0,7	+ 2975	0,7	3,1	4,5	0,845 55	0,85
0,8	+ $1,2 \cdot 10^4$	0,2	1,0	2,1	0,898 15	0,90
0,9	+ $8 \cdot 10^4(?)$	0,0	0,1	0,5	0,949 56	0,95
1,0	+ $\infty$	0	0	0	1	1

Alle Daten sind als um etwa eine Einheit der letzten Ziffer unsicher anzusehen. Der Ort des asymptotischen Drallmaximums stimmt für nicht allzu schlanke innere Zylinder praktisch mit dem Ort des Geschwindigkeitsmaximums überein.

Das Maximum der asymptotischen Drallverteilung (wie auch das der maximalen Durchflussgeschwindigkeit) liegt für alle  $b$  näher am inneren als am äusseren Zylinder, wie aus der Asymmetrie der ersten Eigenfunktion zu ersehen ist.



Figur 1

Die erste Eigenfunktion  $G_1(s)$  für verschiedene Spaltweiten  $b$  [Normierung derart, dass  $G_1'(1)$  für alle Kurven gleich ist.]

### Summary

The investigations of COLLATZ and GÖRTLER (ZAMP 5, 95 [1954]), are generalized to a laminar longitudinal flow between coaxial circular cylinders, superposed by a small angular velocity component. It is found that the eigenvalues  $\lambda$  describing the damping of the angular momentum downstream are rapidly increasing with increasing radius  $b$  of the inner cylinder. The first eigenvalue and eigenfunction are calculated for several values of  $b$ .

(Eingegangen: 23. November 1953.)

---

### Varia – Miscellaneous – Divers

---

#### Historische Anmerkung zum Aufsatz: Einige Anwendungen funktional-analytischer Methoden in der praktischen Analysis<sup>1)</sup>

VON LOTHAR COLLATZ, Hamburg

Einem Vortrage von Herrn A. OSTROWSKI (am 14. Oktober 1953 in Oberwolfach) und einem Gespräch mit Herrn OSTROWSKI verdanke ich den Hinweis auf einen sehr beachtlichen Briefwechsel von R. MEHMKKE und R. A. NEKRASSOFF, der in Math. Sbornik (Moscow) 16, 437–459 (1892) (drei Briefe von NEKRASSOFF in Russisch, zwei Briefe von MEHMKKE in Deutsch) veröffentlicht ist und in welchem bereits verschiedene Konvergenzkriterien für das Iterationsverfahren in Einzelschritten bei linearen Gleichungssystemen bewiesen sind. Insbesondere ist das für praktische Zwecke sehr nützliche Kriterium  $K < 1$  mit dem nach Gleichung (28) meiner Arbeit berechneten  $K$  nicht erst von SASSENFELD eingeführt worden, wie ich bisher annahm, sondern findet sich auch schon in dem genannten Briefwechsel S. 439, und auf den folgenden Seiten gibt MEHMKKE einen Beweis.

Zu Abschnitt 9 ist noch als Literatur hinzuzufügen:

A. OSTROWSKI, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale*, Comment. Math. Helv. 10, 69–96 (1937).

---

### 2. Internationale Tagung für Kurzzeitphotographie und Hochfrequenzkinematographie

Die 2. Internationale Tagung für Kurzzeitphotographie und Hochfrequenzkinematographie wird vom 22. bis 28. September 1954 in Paris stattfinden. Das Organisationskomitee besteht aus den Herren LUCIEN BULL, Direktor des Marey-Instituts (Vorsitzender), Ingénieur Général P. LIBESSART, Prof. Dr. H. SCHARDIN, Ingénieur en Chef P. FAYOLLE, J. VIVIÉ, Sekretär der AFITEC (Kassenführer), Ingénieur Principal P. NASLIN (Sekretär) sowie ausländischen Delegierten. Der Schriftverkehr, der die Tagung betrifft, ist zu führen mit dem Sekretär des Organisationskomitees, M. Ingénieur Principal P. NASLIN, Laboratoire Central de l'Armement, Fort de Montrouge, Arcueil (Seine), Tél. Alésia 06.46.

Vorträge werden gehalten nicht nur über die optischen, mechanischen, elektrischen und elektronischen Methoden, Verfahren, Geräte und Zubehörapparate der Kurzzeitphotographie und -radiographie und der Hochfrequenzkinematographie

<sup>1)</sup> L. COLLATZ, ZAMP 4, 327–357 (1953).

und -radiokinematographie, sondern auch über die *Anwendungen* dieser Methoden zur Untersuchung schnelllaufender Vorgänge in den verschiedensten wissenschaftlichen und technischen Gebieten (Physik, Aero- und Gasdynamik, Werkzeugmaschinen, Metallurgie, Elektronik, Motoren, Ballistik, Medizin, Chirurgie, Biologie usw.). Die Hochfrequenzkinematographie bezieht sich im allgemeinen nicht auf Aufnahmeserien, die mit Bildfrequenzen unter 100 s aufgenommen worden sind.

Die drei *Tagungssprachen* sind Französisch, Englisch und Deutsch. Der *Tagungsbeitrag* beträgt für die Vortragenden 1000 Francs, für die übrigen Teilnehmer 2000 Francs. Jeder Teilnehmer erhält vor der Tagungsöffnung Zusammenfassungen aller Vorträge. In den Grenzen des zur Verfügung stehenden Raumes können die Teilnehmer photographische und kinematographische Apparate und Zubehör, gegebenenfalls kommerziellen Charakters, ausstellen. Für die Ausstellung jedes Gerätes wird ein Beitrag von 20000 Francs erhoben.

Im Auftrage des Organisationskomitees: J. EGGERT, Zürich

### **Generalversammlung der Union Radio-Scientifique Internationale vom 23. August bis 2. September 1954 in den Haag**

Die Union Radio-Scientifique Internationale (U. R. S. I.) wird ihre diesjährige Generalversammlung vom 23. August bis 2. September 1954 in den Haag (Holland) abhalten. Nähere Auskünfte erteilen die Präsidenten der Nationalkomitees oder das Generalsekretariat in Brüssel (42, rue des Minimes). Das Sekretariat des Organisationskomitees liegt in den Händen von Herrn Dr. C. TH. VAN DER WIJCK (Direction générale des P. T. T. des Pays-Bas, Kortenaerkade 12, 's Gravenhage). Anmeldungen zur Teilnahme sind möglichst frühzeitig erbeten. Die Programme werden noch erscheinen.

F. TANK

### **Internationales Symposium über experimentelle Meteorologie in Zürich vom 4. bis 6. Oktober 1954**

Die «Eidgenössische Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr» wird an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich vom 4. bis 6. Oktober 1954 ein Internationales Symposium über experimentelle Meteorologie abhalten. Im Rahmen dieses Kolloquiums sollen in erster Linie die Fragen der natürlichen Niederschlagsbildung und ihre künstliche Beeinflussung besprochen und im besondern das Problem der Hagelbildung erörtert werden. Für dieses Symposium sind eine beschränkte Zahl von Hauptvorträgen ins Programm aufgenommen worden, ferner sind Kurzvorträge vorgesehen; doch soll den Diskussionen möglichst reichlich Zeit eingeräumt werden. Als Vortragende und Diskussionsteilnehmer haben zugesagt:

EUGENE BOLLAY, North American Weather Consultants, Altadena, Calif.; Prof. Dr. MARIO BOSSOLASCO, Istituto Geofisico Italiano, Milano; Prof. Dr. HORACE R. BYERS, Department of Meteorology, University of Chicago; HENRI DESSENS, Direktor des Observatoire Puy-de-Dôme, Clermont-Ferrand; L. FACY, Ingénieur en Chef, Météorologie Nationale, Paris; E. M. FOURNIER D'ALBE, Geophysical Observatory, Quetta, Pakistan; Dr. CH. JUNGE, Geophysics Research Directorate, Cambridge, Mass.; F. H. LUDLAM, Department of Meteorology, Imperial College of Science, London; B. J. MASON, Department of Meteorology,



Imperial College of Science, London; R. J. MURGATROYD, Meteorological Research Flight, Farnborough; Dr. WALTER RAU, Max-Planck-Institut für Physik der Stratosphäre, Weissenau bei Ravensburg; Dr. VINCENT J. SCHAEFER, Munitalp Foundation, Inc., Schenectady, N. Y.; G. SOULAGE, Observatoire Puy-de-Dôme, Clermont-Ferrand; Prof. Dr. FERD. STEINHAUSER, Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien; OTTARIO VITTORI, Osservatorio Monte Cimone, Sertola, Italien, und ein Mitglied des U.S. Advisory Committee on Weather Control.

Anfragen sind zu richten an die Adresse des Präsidenten der Kommission: Prof. Dr. R. SÄNGER, ETH., Postfach, Zürich 23 (Schweiz).

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

#### **Rechenmethoden der Quantentheorie.** Von S. FLÜGGE und H. MARSCHALL.

1. Teil: *Elementare Quantenmechanik*, 2. Auflage (Springer, Berlin 1952). 272 S.: DM 29,80, Ganzleinen DM 32,80.

Dieses schon in der ersten Auflage sehr günstig aufgenommene Werk liegt nun in zweiter, umgearbeiteter Auflage vor. Die Änderungen, deren Tendenz vor allem war, die physikalischen Fragestellungen stärker als bisher hervortreten zu lassen, dürften das dem Lernenden wie dem Lehrenden gleich wertvolle Buch noch wesentlich bereichert haben. Jedenfalls ist der Einschluss von Aufgaben über die WKB-Methode, über das neue Schwingersche Variationsverfahren für Streuprobleme und anderes sicherlich ein Vorzug, ebenso die vertiefte Behandlung des Diracschen Störungsverfahrens, das in allen Anwendungen der Quantentheorie ja eine zentrale Stellung innehat. Die elementaren Mehrkörperprobleme und das Pauli-Prinzip sind neu aufgenommen worden; dafür wird die Diracsche Theorie des Elektrons auf den zweiten Band verspart, der offenbar der relativistischen Quantentheorie und der Theorie der Strahlung gewidmet sein soll. Nach dem guten Gelingen der Neufassung des ersten Bandes erwartet man mit doppelter Spannung das Erscheinen des zweiten.

M. R. Schafroth

**Linear Algebra and Projective Geometry.** By REINHOLD BAER (Academic Press Inc., Publishers, New York, 1952). 318 pp., 19 Figs; \$6.50.

Das in der von P. A. SMITH und S. EILENBERG herausgegebenen Sammlung «Pure and Applied Mathematics» erschienene Buch setzt sich zum Ziel, die strukturelle Identität der linearen Algebra und der projektiven Geometrie aufzuzeigen durch Hervorhebung der algebraischen Formulierung geometrischer Begriffe. Im Vordergrund stehen daher zunächst die linearen Mannigfaltigkeiten, die semilinearen und linearen Transformationen sowie die semilinearen Formen, denen entsprechend die projektiven Geometrien, die Projektivitäten und Kollineationen sowie die Dualitäten zugeordnet sind. Die Sätze werden möglichst allgemein formuliert, also ohne Beschränkung auf die Dimension oder den zugrunde gelegten Körper. Damit wird die von verschiedenen Autoren seit der Jahrhundertwende angebahnte Entwicklung zu einem gewissen Abschluss gebracht, und es zeigt sich die Tragweite der rein algebraischen Methode. Infolge des gesteckten Zieles fehlen die Determinanten und die Matrizen, ebensowenig treten Stetigkeitsbetrachtungen auf. Aus dem Inhalt: II. The Basic Properties of a Linear Manifold, III. Projectivities, IV. Dualities, V. The Ring of a Linear Manifold, VI. The Groups of

a Linear Manifold, VII. Internal Characterization of the System of Subspaces. Zahlreiche Detailfragen, Spezialfälle und Ergänzungen sind in Anhängen zu den einzelnen Kapiteln untergebracht. Im ganzen handelt es sich um ein sehr verdienstvolles Werk, das auch manche neue Gesichtspunkte aufweist.

*E. Roth-Desmeules*

**Compendium of Meteorology**, Prepared under the Direction of the Committee on the Compendium of Meteorology H. R. BYERS, H. E. LANDSBERG, H. WEXLER, B. HAURWITZ, A. F. SPILHAUS, H. C. WILLET, H. G. HOUGHTON, Chairman. Edited by THOMAS F. MALONE (American Meteorological Society, Boston, Massachusetts 1951). 1334 pp., Fr. 62.40.

Dieses grosse Werk der American Meteorological Society in Boston zeigt wohl wie kein anderes, welche Wandlungen die wissenschaftliche Meteorologie im letzten Jahrzehnt durchgemacht hat. Der Herausgeber, THOMAS F. MALONE, meint, mit dem Eintritt in die zweite Hälfte unseres Jahrhunderts ständen wir auf der Schwelle einer aufregenden Ära in der Geschichte der Meteorologie, in welcher bedeutende Fortschritte zu einem besseren Verständnis der physikalischen Gesetze, welche in der Atmosphäre herrschen, möglich sind. Schon die Wahl der Themen und das verschieden grosse Gewicht, das den einzelnen Abhandlungen gegeben wird, zeigen diese Wandlung. Wir müssen es uns hier versagen, zu schildern, in welcher Art die 108 Abhandlungen, an denen 102 Autoren aus der ganzen Welt gearbeitet haben, in 25 Abschnitte eingeteilt sind; wir können hier nur einige grosse Gruppen hervorheben. Die erste grosse Gruppe befasst sich vornehmlich mit der physikalischen Meteorologie, wobei die Physik der Wolken besonders eingehend behandelt wird. Im folgenden Abschnitt, der Meteorologie der höheren Atmosphäre, der allein aus zwölf grossen Beiträgen besteht, werden – nach einem kurzen Abstecher in die kosmische Meteorologie – die Dynamik der Atmosphäre, die Zirkulationssysteme und sehr ausführlich die Probleme und Methoden der Wettervorhersage dargestellt. Dreizehn Beiträge sind der tropischen, der polaren Meteorologie und der Klimatologie gewidmet. Diesen schliessen sich in mehr oder minder logischer Folge Abhandlungen an über Hydrometeorologie, Meteorologie der Meere, biologische und chemische Meteorologie und Staubbmessungen in der Atmosphäre. In einem besonderen Abschnitt werden die Wolken, der Nebel und die Vereisung von Flugzeugen behandelt, während sich die letzten Abschnitte mit meteorologischen Messinstrumenten, Untersuchungen im Laboratorium (Modellversuchen), mit Radiometeorologie und Mikroseismik befassen.

Es handelt sich bei diesem Compendium keineswegs um eine erschöpfende Behandlung der meteorologischen Materie; es ist also kein Nachschlagewerk im eigentlichen Sinne. Der Hauptzweck besteht vielmehr darin, eine Bestandsaufnahme der im letzten Jahrzehnt gesammelten Erkenntnisse vorzunehmen und die vielen noch der Lösung harrenden Probleme zu skizzieren. Die gleiche Materie ist oft von zwei Autoren bearbeitet worden. Dies geschah absichtlich, obgleich damit eine gewisse Doppelspurigkeit unvermeidbar wurde. Aber es ist ebenso interessant wie anregend, zu sehen, wie verschieden das gleiche Problem und seine Lösungsmöglichkeit von verschiedenen Forschern betrachtet wird.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass die meteorologische Forschung durch die Bedürfnisse des Zweiten Weltkrieges mächtig gefördert worden ist. Die Mittel, die namentlich in den Vereinigten Staaten von Amerika hierfür eingesetzt wurden und werden, sind nicht nur ungeheuer gross, es wird auch keine Mühe gescheut, das modernste Instrumentarium aus der gesamten Wissenschaft und Technik für die Meteorologie anzuwenden oder neues zu entwickeln, um die sehr komplexen

Vorgänge in der Atmosphäre zu erfassen. Die in der Meteorologie so lange herrschend gewesene statistische Methode wird offensichtlich immer mehr von der physikalischen Betrachtungsweise abgelöst. Nicht nur ist die Atmosphäre selber zum grossen Experimentierfeld geworden, auch die Modellversuche im Laboratorium spielen eine immer grössere Rolle. Die experimentelle Meteorologie hat sich ja schon heute zu einem höchst selbständigen Wissenszweig entwickelt.

Dass bei dieser stürmischen Entwicklung der Forschung ein Werk wie das vorliegende Kompendium in mancher Hinsicht einen recht inhomogenen Charakter hat, ist ohne weiteres verständlich. Es ist aber ein grosses Verdienst, dass die fast unübersehbar gewordenen Einzelpublikationen zu abgerundeten monographischen Darstellungen verarbeitet worden sind. Auch dass bei allen Beiträgen Bedeutung und Anwendbarkeit der Erkenntnisse für den praktischen Wetterdienst herausgearbeitet werden, sei besonders hervorgehoben. Kein Meteorologe wird das Werk aus der Hand legen, ohne von ihm angeregt zu sein.

*J. C. Thams*

**Imperfections in Nearly Perfect Crystals.** By W. SHOCKLEY, J. H. HOLLOMON, R. MAURER, and F. SEITZ (John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London, 1952). 490 pp.; \$7.50.

Die Eigenschaften von Kristallen hängen weitgehend von der Anordnung der sie aufbauenden Teilchen (Atome, Ionen usw.) und der Art der gegenseitigen Bindung derselben ab. Aber auch der Grad der Idealität des Gitterbaues ist bekanntlich oft von entscheidender Bedeutung, insbesondere bei den sogenannten störungsempfindlichen (= strukturempfindlichen) Eigenschaften, wie zum Beispiel die Festigkeit, die elektrische Leitfähigkeit und anderes mehr. Das vorliegende Buch (Symposium einer vom 12. bis 14. Oktober 1950 abgehaltenen Konferenz des «Committee on Solids» des National Research Council U.S.A.) gibt einen guten Einblick in die Natur der Störungen von Kristallgittern, insbesondere von Metalkristallen. Ein einleitendes Kapitel von F. SEITZ macht den Leser mit den verschiedenen Typen der Gitterunvollkommenheiten bekannt (Phononen, Elektronen und Löcher, Excitonen, Leerstellen und Zwischengitterplatz-Atome, Fremdstoffatome, Versetzungen) und beleuchtet deren Wirkung auf die Kristalleigenschaften. Anschliessend werden die Versetzungen geometrisch charakterisiert (READ und SHOCKLEY) und ihre Bedeutung für die Verformung von Metallen erörtert (BARRETT, READ, MOTT, AVERBACH und andere). In einem weiteren Kapitel wird die Diffusion unter anderen vor allem durch BRECKENRIDGE und ZENER behandelt. Ferner geht eine Reihe von Arbeiten auf die Eigenschaften und Auswirkungen der Korngrenzen ein (insbesondere READ, SHOCKLEY, CHALMERS) wie auch auf die Bewegungen in denselben (SMOLUCHOWSKI). Die Natur der inneren Korngrenzen (Mosaikgrenzen, «subboundaries» usw.) beleuchtet schliesslich GUINIER. Das ganze Buch ist gut illustriert und vermag dem Leser einen guten Überblick über den Stand der heutigen Kenntnisse vom Realbau der Kristalle zu geben. Es kann daher jedem, der sich hierüber informieren möchte, bestens empfohlen werden.

*W. Epprecht*

**C. B. Biezeno, Anniversary Volume on Applied Mechanics** (H. Stam, Antwerpen, Djakarta 1953). 328 S.; Hfl. 20.—.

Am 2. März 1953 feierte C. B. BIEZENO seinen 65. Geburtstag. Ein kleiner Kreis von Freunden, Mitarbeitern und Schülern hat ihm die vorliegende Festschrift gewidmet, die einen erfolgreichen Lehrer ehrt, aber auch einen der bedeutendsten Forscher auf dem Gebiete der Elastizitätstheorie, den Mitbegründer der



Internationalen Kongresse für theoretische und angewandte Mechanik und nicht zuletzt eine feine und kultivierte Persönlichkeit.

Die Festschrift wird durch eine kurze Lebensbeschreibung des Jubilars sowie durch ein vollständiges Verzeichnis seiner Publikationen eingeleitet. Im weiteren enthält sie die folgenden Beiträge:

W. BOOMSTRA, *Triangles équilatères inscrits dans une conique donnée*; H. BREMEKAMP, *Sur la théorie de Sturm-Liouville*; TH. VON KÁRMÁN and G. MILLÁN, *The thermal theory of constant pressure deflagration*; J. M. BURGERS, *Some remarks on detonation and deflagration problems in gases*; C. KONING, *Some interference problems*; R. V. SOUTHWELL and G. VAISEY, *A problem suggested by Saint-Venant's 'Mémoire sur la torsion des prismes'*; R. GRAMMEL, *Nichtlineare Schwingungen mit unendlich vielen Freiheitsgraden*; R. J. LEGGER, *The d'Alembert principle*; F. J. PLANTEMA and W. J. VAN ALPHEN, *Compressive buckling of sandwich plates having various edge conditions*; A. D. DE PATER, *La stabilité d'un dicône se déplaçant sur une voie en alignement droit*; A. VAN DER NEUT, *The local instability of compression members, built up from flat plates*; J. A. HARINGX, *Stresses in corrugated diaphragms*; A. VAN WIJNGAARDEN, *Ut tensio sic vis*; D. DRESDEN, *Shrink-fit used to transmit a torque*; W. T. KOITER, *On partially plastic thick-walled tubes*; C. G. J. VREEDENBURGH and O. STOKMAN, *Some new elements in the calculation of flat slab floors*; J. P. MAZURE, *Statistical problems in the code of practice for steel windows*; J. J. KOCH, *The Laboratory for Applied Mechanics at the Technological University of Delft*; R. G. BOITEN, *The design of diaphragms for pressure measuring devices, based on the use of wire-electrical strain gauges*. H. Ziegler

**Introduction to Measure and Integration.** By M. E. MUNROE (Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge, Mass., 1953). 310 pp.; \$7.50.

Cet excellent ouvrage s'adresse à des étudiants avancés, ayant déjà suivi un cours sur la théorie des fonctions de variables réelles. Ils y trouveront une exposition didactique de la théorie moderne de la mesure et de l'intégrale. De nombreux exemples et contre-exemples, des problèmes allant du facile au difficile sont insérés dans chaque chapitre. Plusieurs aperçus sur les relations entre la notion de probabilité et celle de la mesure, sur les espaces de HILBERT et de BANACH, sur la moyenne ergodique et sur la mesure de HAAR dans les groupes, donnent une première orientation sur des domaines qui sont encore l'objet de recherches.

Table des matières: I. Point Set Theory (1–71). II. Measure. General Theory (72–114). III. Measure. Specific Examples (115–144). IV. Measurable Functions (145–164). V. Integration (165–218). VI. Convergence Theorems (219–266). VII. Differentiation (267–302). Bibliography, Index of Postulates, Index of Symbols, Index (303–310). M. Plancherel

**Inhalt und Mass.** Von KARL MAYRHOFFER (Springer-Verlag, Wien 1952). 269 S., 17 Abb.; broschiert sFr. 37.–, Ganzleinenband sFr. 40.–.

Sowohl die klassischen als auch die modernen Integrationstheorien fassen auf der Theorie der Inhalte und Masse (totaladditiver Inhalt auf einem Sigma-mengenkörper). Das Buch von K. MAYRHOFFER gibt einen lückenlosen Aufbau dieser Theorie unter Wahrung der grössten Allgemeinheit. Zunächst wird der abstrakte Inhalts- und Massbegriff axiomatisch eingeführt, um dann, ausgehend vom anschaulichen, elementaren Inhaltsbegriff, den Jordanschen Inhalt sowie das Borelsche und das Lebesguesche Mass zu definieren. Nach einem Kapitel über das Verhalten von Inhalt und Mass bei linearen Transformationen wird die

Masstheorie von CARATHÉODORY axiomatisch dargelegt und der Zusammenhang mit dem abstrakten Mass untersucht. Schliesslich folgt im letzten Kapitel die Verallgemeinerung auf Somenfunktionen.

Das Buch gibt einen trefflichen Überblick über dieses grundlegende Gebiet der Mathematik und führt bis zu den Ergebnissen der aktuellen Forschung. Es zeichnet sich durch einen strengen, klaren Aufbau aus. *E. Roth-Desmeules*

**Introduction to the Differential Equations of Physics.** By L. HOPF; translated by W. NEF (Dover Publications, New York, 1948). 154 pp.; \$1.25.

Dans cet ouvrage de 154 pages petit format, dont la lecture n'exige que la connaissance des éléments du calcul différentiel et intégral, l'auteur expose les notions fondamentales de l'analyse vectorielle. Il en donne des applications à la mécanique et à la physique et il intègre dans quelques cas simples les équations différentielles et aux dérivées partielles auxquelles ces applications conduisent.

Comme il convient dans un livre qui ne veut être qu'une « introduction », l'auteur fait davantage appel à l'intuition géométrique et physique qu'à la rigueur du formalisme mathématique (le paragraphe consacré à l'intégrale de FOURIER va cependant trop loin dans ce sens en introduisant sans explication l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha$$

qui n'a pas de sens). Cette réserve faite, il faut féliciter l'auteur d'avoir réussi à donner sous une forme limpide un exposé dont la lecture peut être recommandée au futur ingénieur ou physicien.

Contenu: I. The Differential Equation as an Expression of a Law of Nature (1–4). II. The Ordinary Differential Equations of the Mechanics of Particles (6–38). III. The Simplest Partial Differential Expressions (39–63). IV. The Simplest Partial Differential Equations (64–83). V. Solution by Eigenfunctions (84–123). VI. Solution by Change of Variables (124–137). VII. Solution by the Use of Singularities (138–152). Index (153–154). *M. Plancherel*

**Signal, Noise and Resolution in Nuclear Counter Amplifiers.** By A. B. GILLESPIE (Pergamon Press Ltd., London 1953), 155 pp., 59 figs.; 21s.

In jedem kernphysikalischen Laboratorium ist man heute auf geeignete Verstärker angewiesen, insbesondere wenn Ionisationskammer, Proportionalzählrohr oder Szintillationszähler zum Nachweis und zur Untersuchung von Kernprozessen Verwendung finden. An solche Verstärker sind spezielle Forderungen zu stellen. So soll das Verhältnis von Signal zu Störpegel, bedingt durch Widerstandsrauschen, Schroteffekt, Funkeffekt usw., möglichst gut sein und gleichzeitig ein ausreichendes zeitliches Auflösungsvermögen erreicht werden.

In dem vorliegenden Werke werden zunächst die elektrischen Signale der in Frage kommenden Detektoren zum Nachweis von Partikeln diskutiert und anschliessend die auftretenden Störquellen behandelt. Dies bildet die Grundlage zur zweckmässigen Wahl der ersten Röhre und ihrer Arbeitsbedingungen sowie zur Wahl des Netzwerkes, welches die Übertragungsfunktion des Verstärkers bestimmt.

Das Büchlein bietet eine Übersicht über diese Probleme und ihre Lösung und enthält eine Reihe von experimentellen und theoretischen Ergebnissen, deren Kenntnis allen Physikern und Ingenieuren, die sich mit derartigen Fragen zu beschäftigen haben, von Nutzen sein werden. *E. Baldinger*



ELEKTRONENMIKROSKOPE  
MIKROTOME  
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN  
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

*Mathematische Neuerscheinungen aus dem Verlag Birkhäuser, Basel*

### **Einfall und Überlegung in der Mathematik**

von Dr. B. L. van der Waerden, Professor an der Universität Zürich. Sonderdruck aus «Elemente der Mathematik», 26 Seiten mit 15 Abbildungen, Fr. 4.15 (1954).

### **Analytische Geometrie**

von Dr. Wilhelm Blaschke, Professor an der Universität Hamburg. Zweite verbesserte Auflage, 190 Seiten mit 67 Figuren, Ganzleinen Fr. 19.60, broschiert Fr. 16.65 (1954). – *Aus dem Inhalt:* Grundbegriffe, Vektoren, Matrizen – Kugeln – Stäbe – Trägheitsmomente – Quadriken – Konfokale Quadriken – Formelsammlung – Namen- und Sachverzeichnis.

### **Projektive Geometrie**

von Dr. Wilhelm Blaschke, Professor an der Universität Hamburg. Dritte verbesserte Auflage, 197 Seiten mit 71 Figuren, Ganzleinen Fr. 19.60, broschiert Fr. 16.65 (1954). – *Aus dem Inhalt:* Einleitung: Gegenstand, Geschichtlicher Abriss – Schrifttum – Homogene Zeiger, Kollineation – Korrelation – Doppelverhältnis – Staudts Hauptsatz – Kegelschnitte – Liniengeometrie – Quadriken – Nichteuklidische Geometrie – Vierflächpaare von Möbius – Waben und Gruppen – Namen- und Sachverzeichnis.

### **Übungen zur projektiven Geometrie**

von Dr. Horst Herrmann, Braunschweig. 168 Seiten mit 90 Figuren, 4 zweifarbige Raumbilder und 2 rotgrüne Betrachtungsbrillen, Ganzleinen Fr. 17.–, broschiert Fr. 14.– (1952). – *Aus dem Inhalt:* Projektive Ebene – Die Matrix als Figur – Die Figur als Matrix – Kollineation – Korrelation – Inversion – Projektiver Raum – Vereinigte Lage – Geraden – Kollineation und Korrelation – Liniengeometrie – Quadriken – Kurven dritter Ordnung – Fläche dritter Ordnung – Konfigurationen.

«Das eigenartige und reichhaltige Buch stellt eine wertvolle Ergänzung zu den Werken 'Projektive Geometrie' und 'Analytische Geometrie' von W. Blaschke dar.»  
(Elemente der Mathematik)

*Sonderprospekte stehen auf Verlangen gern zur Verfügung*

*Zu beziehen durch jede Buchhandlung*

ARCHIVES OF MATHEMATICS  
**ARCHIV DER MATHEMATIK**  
ARCHIVES MATHÉMATIQUES

---

Herausgegeben in Verbindung mit dem Mathematischen Forschungsinstitut in  
Oberwolfach von H. BILHARZ, H. KNESER und W. SÜSS

---

VOL. V – 1954

ERSCHEINT ALS FESTSCHRIFT FÜR

**ALEXANDER M. OSTROWSKI**

mit Arbeiten, die Freunde, Kollegen und Schüler dem verehrten Lehrer und  
Forscher zum 60. Geburtstag am 25. September 1953 widmeten

---

Vol. V (1954) erscheint in zwei Teilen

Teil I (248 Seiten) im Mai 1954, Teil II (etwa 240 Seiten) im August 1954

Preis von Vol. V . . . . . Fr. 72.– (DM 72.–)

*Subskriptionspreis bis 31. Juli 1954 Fr. 60.– (DM 60.–)*

Auf vorstehend genannte Preise erhalten Mitglieder mathematischer Vereinigungen  
einen Spezialrabatt von 20%

*Inhalt:* Beiträge von Baer, R.; Bellman, R., und Hoffman, A.; Bieberbach, L.;  
Bilharz, H., und Schottländer, St.; Blanc, Ch.; Brelot, M.; Carltz, L.; Collatz, L.;  
Conforto, F.; Deny, J.; Dieudonné, J.; Eichler, M.; Erdős, P.; Herzog, F., und  
Piranian, G.; Fan, Ky; Fantappiè, L.; Görtler, H.; Goldberg, K., Newman, M.,  
Straus, E. G., und Swift, J. D.; Green, J. W.; Gröbner, W.; Grün, O.; Haack, W.,  
und Hellwig, G.; Hadwiger, H.; Hartman, Ph., und Wintner, A.; Hasse, H.;  
Heinhold, J.; Henrici, P.; Hölder, E.; Hofmann, J. E.; Hoheisel, G.; Jäger, A.;  
Kaluza, Th. Jr.; Kneser, H.; Krull, W.; Lammle, E.; Levi, F. W.; Lichnerowicz, A.;  
Lorentz, G. G.; Maier, W.; Meixner, J., und Schaefke, F. W.; Nagell, T.; Neumer, W.;  
Nørlund, N. E.; Obrechhoff, N.; Radon, J.; Richter, H.; Rogosinski, W. W.;  
Rothstein, W.; Rutishauser, H.; Schmeidler, W.; Schmidt, Herm.; Seibert, P.;  
Specker, E.; Sperner, E.; Stiefel, E.; Steuerwald, R.; Strubecker, K.; Süß, W.;  
Taussky-Todd, O.; Tautz, G. L.; Todd, J.; Tricomi, F.; Turan, P.; Varga, O.;  
van der Waerden, B. L.; Wall, H. S.; Walsh, J. L., und Evans, J.; Warschowski, S. E.;  
Weil, A.; Wever, F.; Wielandt, H.; Wittich, H.; Wu, T. T.; Zassenhaus, H.

---



**VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL, STUTTGART**



*clichés*  
in jeder Technik



**SCHWITTER**  
**A-G**

**BASEL / ZÜRICH**

# **Werke der reinen und angewandten Mathematik und Physik** aus dem Verlag Birkhäuser · Basel und Stuttgart

## *Mathematik*

BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen . . .	geb. Fr. 18.70
BLASCHKE, W.: Projektive Geometrie . . . . .	geb. Fr. 19.60
BLASCHKE, W.: Analytische Geometrie . . . . .	geb. Fr. 19.60
BURCKHARDT, J. J.: Die Bewegungsgruppen der Kristallographie . . .	geb. Fr. 33.30
CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie, Bd. I geb. Fr. 39.50, Bd. II	geb. Fr. 27.05
CARATHÉODORY, C.: Mass und Integral und ihre Algebraisierung .	erscheint 1954
DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I:	
Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation . .	geb. Fr. 83.20
FINSLER, P.: Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen . . .	geb. Fr. 15.40
FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes .	geb. Fr. 24.95
HERRMANN, H.: Übungen zur projektiven Geometrie . . . . .	geb. Fr. 17.—
HURWITZ, A.: Mathematische Werke, 2 Bände . . . . .	geb. je Fr. 54.10
LINDER, A.: Statistische Methoden, 2. Auflage 1951 . . . . .	geb. Fr. 31.20
LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung . . . . .	geb. Fr. 49.90
LOCHER-ERNST, L.: Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven	geb. Fr. 12.50
MICHAEL, W.: Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene	geb. Fr. 13.50
OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Diff.- u. Integralrechng., Band I	geb. Fr. 36.40
(Band III erscheint demnächst) Band II	geb. Fr. 69.70
SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I	geb. Fr. 56.15
(Band III in Vorbereitung) Band II	geb. Fr. 56.15
STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie . . . . .	geb. Fr. 29.65
TROST, E.: Primzahlen . . . . .	brosch. Fr. 13.50
VOELKER, D., DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transf.	geb. Fr. 47.85
ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik . . . . .	geb. Fr. 31.20

## *Physik und Astronomie*

GOMBÁS, P.: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenpro-	
blems der Wellenmechanik . . . . .	geb. Fr. 33.30
NIETHAMMER, TH.: Astronomisch-geogr. Ortsbestimmung . . . .	geb. Fr. 36.40
VONDER PAHLEN, E.: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen	geb. Fr. 39.50
WALDMEIER, M.: Einführung in die Astrophysik . . . . .	geb. Fr. 49.40
Kongressbericht der Internationalen Konferenz über Kernphysik	
und theoretische Physik, Basel 1949 . . . . .	brosch. Fr. 16.65

## *Ingenieurwissenschaften*

BODEA, E.: Giorgis rationales MKS-Maßsystem . . . . .	brosch. Fr. 28.10
GOLDSTEIN, J.: Die Messwandler . . . . .	geb. Fr. 29.10
JAEGER, CH.: Technische Hydraulik . . . . .	geb. Fr. 52.—
KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik. Band II: Grundzüge	
der Theorie der Wechselströme u. des einphasigen Transformators	geb. Fr. 27.55
Band III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen . . .	geb. Fr. 74.90
MEISSNER, E., und ZIEGLER, H.: Mechanik. Band I: Statik der star-	
ren, flüssigen und elastischen Körper . . . . .	geb. Fr. 37.45
Band II: Dynamik der starren Körper . . . . .	geb. Fr. 33.80
Band III: Dynamik der Systeme . . . . .	geb. Fr. 46.80
SÄNGER, R.: Ballistische Störungstheorie . . . . .	geb. Fr. 15.10
STRÖSSI, R.: Vorlesungen über Baustatik, Band I . . . . .	geb. Fr. 40.05
RUSTERHOLZ, A.: Elektronenoptik, Band I: Grundzüge . . . . .	geb. Fr. 31.20
RICHTER, R.: Elektrische Maschinen . . . . .	geb. Fr. 49.40
Band I	
Band II geb. Fr. 46.80, Band III	geb. Fr. 26.—
VIDMAR, M.: Die Gestalt der elektrischen Freileitung . . . . .	geb. Fr. 19.75
WAGNER, K. W.: Elektromagnetische Wellen . . . . .	geb. Fr. 33.30

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung*